



# Amortissement par le branchement des structures flexibles : une approche bio-inspirée des arbres

Benoit Theckes

## ► To cite this version:

Benoit Theckes. Amortissement par le branchement des structures flexibles : une approche bio-inspirée des arbres. Vibrations [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . pastel-00777733

**HAL Id: pastel-00777733**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00777733>**

Submitted on 18 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Polytechnique  
Laboratoire d'Hydrodynamique

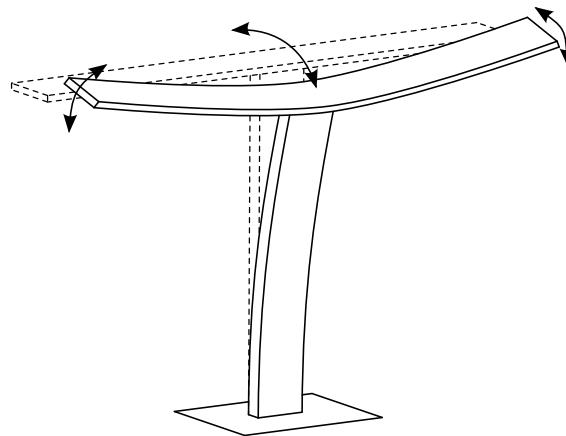
Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Spécialité : Mécanique

par

**Benoit THECKES**

## **Amortissement par le branchement des structures flexibles : une approche bio-inspirée des arbres**



Soutenue le 22 octobre 2012 devant le jury composé de :

M. Bruno COCHELIN	Rapporteur	LMA, Université Aix-Marseille
M. José ANTUNES	Rapporteur	Instituto Tecnológico e Nuclear, Sacavém
M. Hanns-Christof SPATZ	Examineur	Albert-Ludwigs-University, Freiburg
M. Cyril TOUZÉ	Examineur	ENSTA, Unité de mécanique, Paris
M. Xavier BOUTILLON	Co-Directeur	LMS, École Polytechnique, Paris
M. Emmanuel de LANGRE	Directeur	LADHYX, École Polytechnique, Paris



*Cette thèse a été financée par le ministère de la Défense (Direction générale de l'armement - DGA) sous le contrat numéro 2009 60 034 00 470 75 11.*

*À ma fiancée*

# Remerciements

Cette thèse restera une expérience unique dans ma vie qui n'aurait été possible sans Emmanuel de Langre et Xavier Boutillon. Dans ma vie d'écolier puis d'étudiant, quelques professeurs m'auront transmis plus que ce qu'ils ne pensaient enseigner, vous en êtes les représentants les plus exemplaires, merci pour tout !

Je suis très reconnaissant envers Bruno Cochelin et José Antunes pour avoir accepté les rôles de rapporteurs de cette thèse ainsi qu'à Hanns-Christoph Spatz et Cyril Touzé, pour ceux d'examineurs ; je vous remercie pour l'intérêt porté à mon travail.

Je tiens à remercier Jean Marc Chomaz pour sa confiance dans ce projet et ses conseils bien avisés. Une thèse réussie l'est aussi en grande partie par ses aspects matériels ; un grand merci à Pascal Hémon pour son aide sur la partie expérimentale ; à Daniel Guy et Alexandre Rosinski pour le support informatique (des Backups bien faits peuvent sauver une thèse !) ; à Thérèse Lescuyer, Sandrine Laguerre, Judith Koue Lou et Delphine L'Huillier travaillant au bien-être 'administratif' des thésards ; et généralement, à tout le personnel du laboratoire, que ce soit pour leur disponibilité ou simplement pour les bons moments passés autour d'un café.

Pour une partie 'rude' de la thèse (l'utilisation du logiciel Castem), j'ai eu la chance d'avoir les conseils d'Alain Millard qui a pris le temps de répondre à mes questions d'utilisateur acharné de la fonction 'PASAPAS', merci beaucoup.

Olivier Doaré, Cyril Touzé et Jacques Sainte-Marie, merci pour toutes les agréables journées d'enseignement passées à vos côtés à l'Ensta où j'ai beaucoup appris : ce fut un plaisir.

Comment pourrais-je oublier tous les anciens thésards et post-docs qui m'ont chaleureusement accompagné et conseillé en début et milieu de thèse : Frédérick, Mathieu, Shehryar, Rémi, Arnaud et Julien. Je me souviens encore de ma légère appréhension pour débiter cette thèse après mon stage de master ; par vous, elle fut vite dissipée.

Merci à Diego et Christelle pour avoir partagé les joies et galères de nos thèses de façon presque synchronisée, et aussi à Franz, Nicolas, Miguel, John, Christoph, Anette et Marine pour les tous les bons moments passés au labo : may the force be with you !

Anders, Loïc, sans vous ma fin de thèse n'aurait jamais été aussi agréable, je vous souhaite le meilleur pour vos fins de thèse respectives.

Pendant ces trois années, j'ai développé mon cerveau mais aussi mes muscles grâce au club d'aviron et aux amis qui le font vivre : Alexandre & Rebecca, Olivier & Christelle, Frédéric, Patrice & Sylvie, Philippe, Michel, Raphaël, Alain VH, Alain P, Denis, Guiseppe, Jean-Charles, Jean-Marc, Wahb, Anette, Sophie, Hartmut, Isabelle, Kevin, Evgeny, Herbert, Avin, Joëlle, Alain M, Florian, Mickael, Olivier B et tous les rameurs et rameuses du CSX, je vous adresse un chaleureux merci en espérant pouvoir vous rendre visite le plus souvent possible.

Merci aussi à mes amis Clément, Goeffray & Coralie, Karim, Alban & Emmanuelle, Thomas & Marion, pour les soirées, les diners et autres sorties sportives qui m'ont bien fait déconnecter !

“Pourquoi la Lune ne tombe pas ?” question que je posai à ma mère il y a une vingtaine d'années. Ma curiosité pour les sciences a toujours été encouragée par mes parents et ma famille qui ont tout mis en œuvre pour me permettre de réussir, mille tendres mercis !

Merci également à mes futurs beaux-parents, Pierre & Isabelle, et à ma future belle-famille, Mélanie & Valentin, Ky & Simone, Léon & Odile, pour leur enthousiasme constant à l'égard de mon travail.

Je ne sais pas si ce manuscrit aurait vu le jour sans toi, Perrine, mon soutien de tous les jours, me réconfortant sur mes doutes et inquiétudes, tu as toujours été là pour moi, cette centaine de pages te sont dédiées.

# Résumé

Les chargements dynamiques extrêmes sont une cause importante des dommages des structures. Dans la nature, certaines plantes, particulièrement les arbres, résistent régulièrement à des chargements extrêmes comme lors de tempêtes. Pour ces structures vivantes, produits de l'évolution, dissiper efficacement l'énergie mécanique reçue lors de tels chargements conditionne leur survie et le mécanisme de leur amortissement est donc probablement optimisé. L'idée bio-inspirée défendue ici est que le branchement offre aux structures flexibles un mécanisme d'amortissement robuste et spécifique aux vibrations de grande amplitude.

La dynamique en grands déplacements d'un modèle branché élémentaire ayant deux degrés de liberté est étudiée, mettant en évidence un transfert non linéaire d'énergie entre les modes propres. Ce transfert provient de non-linéarités géométriques et s'explique par une excitation centrifuge des branches par l'oscillation du tronc ; cette excitation est effective lorsque le rapport des fréquences des modes correspondants est approximativement de 2. Ce mécanisme, dénommé "amortissement par le branchement", produit une dissipation spécifique qui augmente avec l'amplitude des vibrations. Il apparaît comme robuste vis-à-vis de la variété des sources possibles de dissipation de la structure, provenant, par exemple, de l'interaction avec un fluide environnant. En utilisant la méthode des éléments finis, l'analyse de la dynamique en grands déplacements d'un modèle branché continu constitué de poutres, excité par lâcher ou par forçage, montre l'applicabilité du mécanisme à des structures plus complexes. Une expérience met en évidence ce mécanisme d'amortissement par le branchement sur une structure flexible branchée et réglée en fréquence. Ces résultats ont permis de concevoir un absorbeur dynamique branché pour les systèmes en rotation, lequel offre des performances supérieures, dans une certaine gamme d'amplitudes, à celles d'un absorbeur dynamique classique équivalent. Enfin, l'analyse d'un modèle ramifié suggère que ce mécanisme est effectivement présent dans les arbres.

**Mots clés :** Amortissement, Structures flexibles, Bio-inspiration, Branchement, Dynamique non linéaire, Grands déplacements.





# Abstract

Extreme dynamical loads are a cause of damage of man-made structures. In nature, some plants, trees in particular, repeatedly endure extreme loads mostly caused by strong climatic events. For such living structures, it is of vital importance to efficiently dissipate mechanical energy received by such loading conditions and evolution may well have optimized their damping mechanism. The bio-inspired idea defended here is that structural branching of flexible structures brings a robust and specific damping mechanism for vibrations of large amplitude.

The large amplitude dynamics of an elementary branched model with two degrees of freedom is studied, showing a non-linear energy transfer between normal modes. This transfer originates in the geometrical nonlinearities, explained by the centrifugal forces acting on branches when the trunk oscillates. The transfer is effective when the frequency ratio of the corresponding normal modes is approximately 2. This mechanism, coined "damping by branching", is specifically efficient to dampen large amplitude vibrations. It appears as robust against the variety of possible sources of dissipation of the structure, including the interaction with a surrounding fluid. Using the finite element method and a flexible beam approximation, the dynamics of a continuous branched model, excited by pull-and-released or by harmonic forcing, is analysed and demonstrates the applicability of the mechanism to more complex structures. This damping mechanism is experimentally displayed on a flexible branched structure of which modal frequencies have been tuned. These results lead to the design of a branched dynamic absorber for rotating systems, which offers better performances than those of a conventional and equivalent dynamical absorber in a certain range of amplitudes. Finally, the analysis of a multiple-branched model suggests that this mechanism is actually present in trees.

**Keywords :** Damping, Flexible structures, Bioinspiration, Branching, Nonlinear dynamics, Large amplitude vibrations.

*“L’arbre est beaucoup plus impressionnant qu’on ne le croit ; il est intimement mêlé à notre vie, à notre histoire, à notre vision du monde et même, je pense, à notre origine en tant qu’espèce.”*

*Francis Hallé, Plaidoyer pour l’arbre.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Motivations . . . . .	2
1.1.1	Vibrations de grande amplitude des structures flexibles . . . . .	2
1.1.2	L'amortissement passif . . . . .	3
1.2	L'arbre, source d'inspiration . . . . .	5
1.2.1	Une dynamique particulière . . . . .	8
1.2.2	Les non-linéarités géométriques, sources d'amortissement ? . . . .	10
1.3	Problématique de la thèse . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modèle branché discret</b>	<b>15</b>
2.1	Définition du modèle . . . . .	16
2.1.1	Géométrie et cinématique . . . . .	16
2.1.2	Équations du mouvement . . . . .	17
2.2	Mécanisme de couplage . . . . .	19
2.2.1	Interprétation physique . . . . .	19
2.2.2	Modes propres non linéaires . . . . .	19
2.3	Caractérisation de l'amortissement . . . . .	22
2.3.1	Excitation par lâcher . . . . .	22
2.3.2	Amortissement effectif . . . . .	24
2.4	Faibles amplitudes de mouvement . . . . .	25
2.5	Grandes amplitudes de mouvement . . . . .	28
2.6	Discussion . . . . .	31

<b>3</b>	<b>Robustesse du mécanisme</b>	<b>33</b>
3.1	Amortissement non linéaire du mode des branches . . . . .	34
3.1.1	Faibles amplitudes . . . . .	34
3.1.2	Grandes amplitudes . . . . .	36
3.2	Amortissement aérodynamique . . . . .	38
3.2.1	Modèle d'interaction fluide . . . . .	38
3.2.2	Équations du mouvement . . . . .	39
3.2.3	Calcul de l'amortissement effectif . . . . .	41
3.2.4	Grandes amplitudes de mouvement . . . . .	41
3.3	Discussion . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Amortissement de systèmes branchés continus</b>	<b>49</b>
4.1	Modèle branché continu . . . . .	50
4.1.1	Définition du modèle . . . . .	50
4.1.2	Méthode numérique . . . . .	51
4.1.3	Excitation par lâcher . . . . .	54
4.1.4	Excitation par forçage . . . . .	57
4.2	Expérience illustrative . . . . .	60
4.2.1	Description . . . . .	60
4.2.2	Procédure expérimentale . . . . .	61
4.2.3	Résultats . . . . .	63
4.3	Discussion . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>67</b>
5.1	Amortisseur branché de rotation . . . . .	68
5.1.1	Définition du modèle . . . . .	68
5.1.2	Critères de comparaison au TMD . . . . .	70
5.1.3	Résultats . . . . .	71
5.2	Les arbres . . . . .	75
5.3	Modèle ramifié discret . . . . .	79
5.3.1	Définition du modèle . . . . .	79

---

5.3.2	Critères de ramification . . . . .	82
5.3.3	Faibles amplitudes . . . . .	83
5.3.4	Grandes amplitudes . . . . .	85
5.4	Modèles ramifiés continus . . . . .	87
5.5	Discussion . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>91</b>
6.1	Conclusion . . . . .	91
6.2	Perspectives . . . . .	94
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>
<b>A</b>	<b>Compléments au chapitre 2</b>	<b>103</b>
A.1	Expression analytique de la fonction $\bar{\xi}$ . . . . .	103
<b>B</b>	<b>Compléments au chapitre 3</b>	<b>105</b>
B.1	Expression de la fonction $\bar{\xi}_n$ . . . . .	105
B.2	Calculs des moments dus au fluide . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Compléments au chapitre 5</b>	<b>109</b>
C.1	Équations du modèle ramifié . . . . .	109
C.2	Calcul à faibles amplitudes . . . . .	112
<b>D</b>	<b>Article</b>	<b>115</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Les vibrations sont nuisibles dans la majorité des applications d'ingénierie car elles perturbent le fonctionnement et réduisent la durée de vie des structures (Den Hartog, 2007). Les pertes de fonction, voire les dommages irréversibles des structures, ont souvent pour cause des chargements dynamiques inattendus, par leurs intensités, leurs durées et leurs contenus fréquentiels. Les structures flexibles sont particulièrement sensibles à ces problématiques car elles possèdent, par essence, une excitabilité dynamique forte. Le sujet de cette thèse porte sur le développement d'un nouveau mécanisme protecteur, spécifique aux chargements extrêmes subis par les structures flexibles faites par l'Homme.

Dans la nature, les structures flexibles sont omniprésentes. Plus particulièrement, les arbres, qui présentent de grandes surfaces d'échange, subissent des chargements de forte intensité lors des tempêtes. Pourtant, ils résistent avec peu ou pas de dommages dans la plupart des cas. Les connaissances acquises sur leurs dynamiques indiquent une grande adaptation à ces chargements extrêmes par des mécanismes spécifiques. Les travaux présentés dans ce manuscrit, destinés aux structures flexibles faites par l'Homme, s'inspirent des caractéristiques dynamiques particulières présentes dans les arbres.

Après une description des enjeux constituant la motivation de cette thèse dans une première section, ce point de vue bio-inspiré est abordé dans une seconde section. Enfin, la dernière section de cette introduction présentera la problématique précise ainsi que l'organisation des propositions de réponse de cette thèse.



## 1.1 Motivations

### 1.1.1 Vibrations de grande amplitude des structures flexibles

Sous un chargement dynamique extrême, les vibrations de grande amplitude sont l'un des premiers symptômes du mauvais dimensionnement d'une structure. Ces mouvements, dont l'amplitude est de l'ordre ou excède la taille caractéristique de la structure, sont particulièrement attendus dans les structures flexibles, schématisés à la figure 1.1.

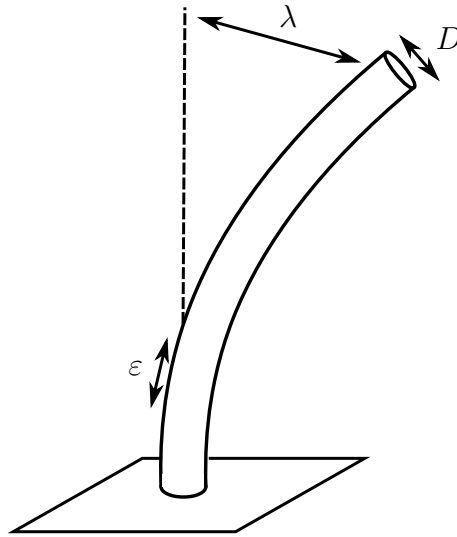


FIGURE 1.1 – Représentation schématique d'une structure flexible de type poutre en grand déplacement,  $\lambda > D$ , en comportement purement élastique du matériau.

La flexibilité d'une structure peut provenir, dans certains cas, des propriétés du matériau lui-même, mais est plus généralement la conséquence de sa géométrie. Les structures élancées comme certaines antennes en sont un exemple. Pour simplifier, nous nous placerons dans tout ce manuscrit dans le cadre de l'élasticité linéaire en ne considérant que des petites déformations locales du matériau,  $\varepsilon \ll 1$ , schématisées à la figure 1.1. Cette thèse se concentrera sur des modélisations de type poutre, dont l'élancement est suffisant pour permettre ce type de comportement.

Nous ne nous intéressons pas aux origines physiques des chargements qui provoquent des vibrations de grande amplitude mais uniquement à leurs intensités. En effet, les solutions préventives requièrent une connaissance précise des mécanismes en jeu. C'est le

cas, par exemple, lors de la modification de la géométrie d'une structure afin de limiter un chargement provenant d'un écoulement fluide. Cependant, les mécanismes d'excitations des structures flexibles ne sont pas tous compris, notamment pour les problèmes d'interaction fluide-structure où les mouvements de la structure influencent le chargement (Païdoussis, Price & de Langre, 2011). Il est alors nécessaire de palier ce manque de connaissance sur les chargements par des mécanismes protecteurs et non spécifiques aux types de chargement, mais spécifiques à leurs conséquences néfastes : les vibrations de grande amplitude.

### 1.1.2 L'amortissement passif

Les vibrations d'une structure dépendent du chargement d'une part (son spectre fréquentiel, son amplitude, etc.) et des caractéristiques de la structure d'autre part, en termes d'inertie, de raideur et d'amortissement (Humar, 2002). L'amortissement d'une structure est sa capacité à dissiper son énergie mécanique, quel que soit le moyen physique impliqué. Un niveau d'amortissement suffisant assure une dissipation efficace de l'énergie mécanique apportée par le chargement externe et minimise ainsi les amplitudes de vibration et les dommages résultants. Notons que pour des cas particuliers, l'introduction d'amortissement peut cependant rendre le système instable (Semler *et al.*, 1998). L'amortissement est donc d'une importance primordiale dans le dimensionnement d'une structure flexible. Nous distinguons deux façons d'amortir : par des moyens actifs ou semi-actifs et par des moyens passifs. Les premiers se distinguent par la présence de capteurs et d'actionneurs et nécessitent donc la présence d'un dispositif de contrôle (Preumont, 2002). Bien que performants, ces systèmes sont coûteux et souvent difficiles à mettre en place sur des structures de grandes échelles. On s'intéresse ici aux moyens passifs, ne nécessitant pas ces dispositifs secondaires.

Sur une structure, la mise en place de dissipations par friction ou par cisaillement d'un fluide visqueux, sont des exemples élémentaires d'amortisseurs passifs. D'autres systèmes plus élaborés d'amortissement passif existent, notamment le concept de 'Tuned-Mass-Damper' (Den Hartog, 2007, p. 119), en abrégé TMD ou ADA pour 'Absorbeur dynamique accordé' dans la version francophone. Son fonctionnement est introduit ici car il servira de référence au chapitre 5 de ce manuscrit. Le TMD consiste en l'ajout, sur une structure, d'un oscillateur simple à un degré de liberté (de translation ou de rotation)

de fréquence, de masse et d'amortissement réglés dans le but d'entrer en résonance pour absorber et dissiper l'énergie provenant des vibrations de la structure. Ce concept, inventé par Frahm en 1911, peut se décliner en de multiples formes. Un exemple d'application pour amortir les vibrations d'une cheminée industrielle par Areemit & Warnitchai (2001) est présenté à la figure 1.2.

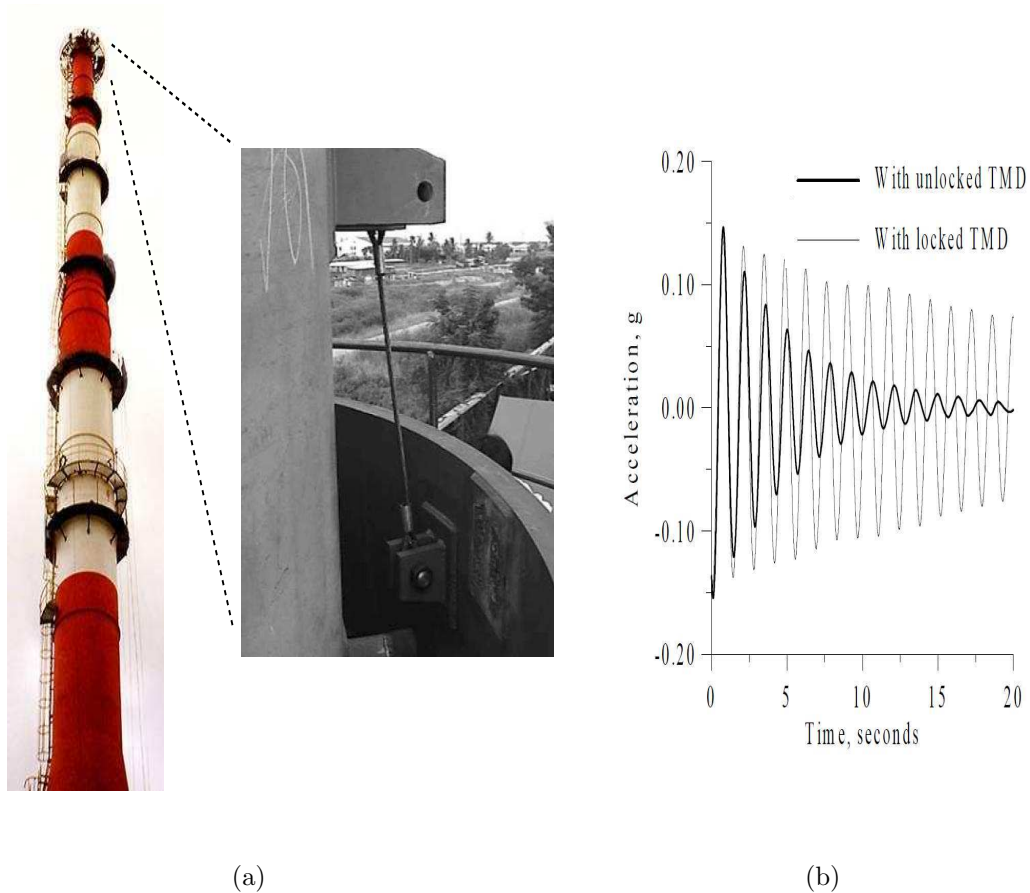


FIGURE 1.2 – Exemple d'application du TMD à l'amortissement passif d'une cheminée industrielle par Areemit & Warnitchai (2001). (a) Le TMD installé en haut de la cheminée industrielle. (b) Réponse libre de la cheminée avec le TMD comparée à la réponse avec le TMD bloqué.

Le dimensionnement d'un TMD est un processus bien connu (Den Hartog, 2007) qui se base sur une unique courbe générique : la réponse fréquentielle de la structure principale forcée, présentée à la figure 1.3. Les détails de cette optimisation seront présentés au chapitre 5.

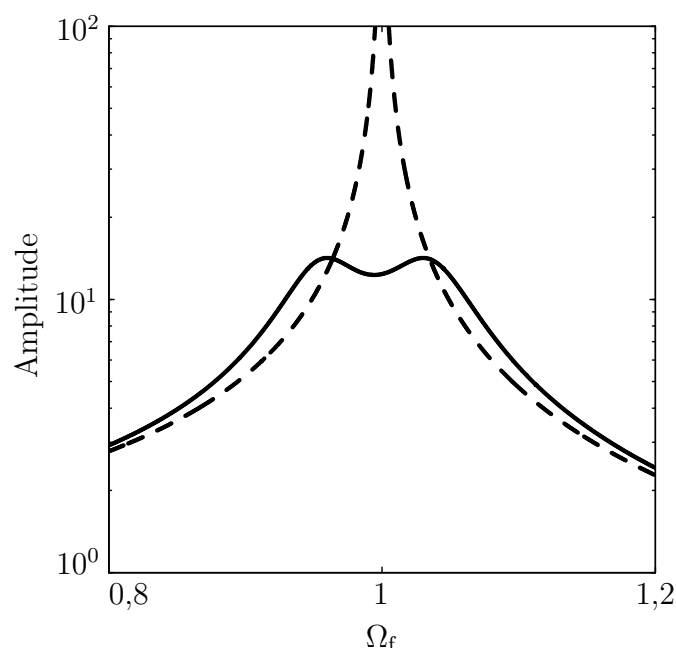


FIGURE 1.3 – Réponse fréquentielle d’une structure dotée d’un TMD d’un rapport de masse de 1% et dont les réglages sont optimaux (—), comparée à celle de la structure sans TMD (---). Ces courbes donnent l’amplitude de la structure principale pour une réponse forcée en régime établi, normalisée par l’amplitude de la réponse statique, en fonction de la fréquence forçage normalisée par la fréquence de résonance de la structure principale.

Nous observons sur la figure 1.3 le gain apporté par le TMD en termes d’amortissement de la structure principale avec un rapport de masse de seulement 1%. Une caractéristique du TMD, qui constitue sa limitation principale, est qu’en tant que système linéaire, ses performances d’amortissement sont indépendantes du niveau de vibration, donc non spécifiques aux chargements extrêmes (Den Hartog, 2007). Le développement de mécanismes dissipatifs, passifs, qui procureraient, par exemple, un amortissement augmentant avec l’amplitude des vibrations, permettrait une meilleure protection des structures subissant ce type de chargement.

## 1.2 L’arbre, source d’inspiration

Pour beaucoup de problèmes d’ingénierie, la nature peut être une source d’inspiration innovante, (Speck *et al.*, 2008; Gruber, 2011; Jeronimidis & Atkins, 1995). Les arbres sont

la source de nombreuses applications bio-inspirées comme par exemple sur la création de matériaux autoréparants (Speck *et al.*, 2006), ou encore sur l'optimisation de raccords mécaniques (figure 1.4).

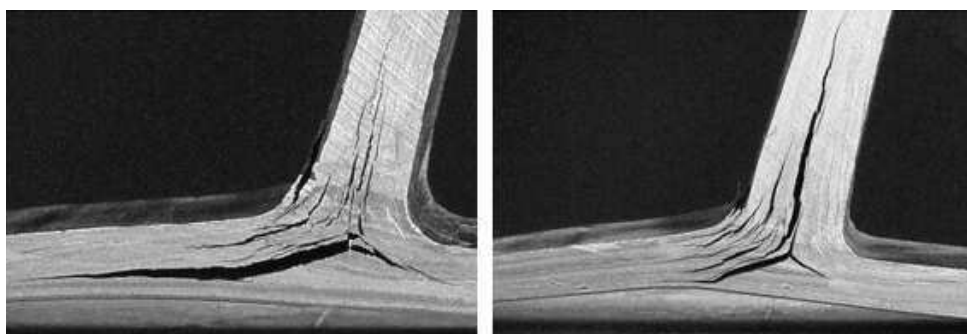


FIGURE 1.4 – Comportement à la rupture en flexion d'un raccord composite conventionnel (à gauche) comparé à un raccord renforcé bio-inspiré du branchement dans les arbres (à droite), par Burns *et al.* (2011). La fissuration du raccord bio-inspiré de droite est mieux répartie, lui apportant une plus grande résistance.

Curieusement, encore peu de travaux bio-inspirés portent sur la notion d'amortissement. On citera par exemple, les travaux de Yoon & Park (2011) qui ont récemment développé un dispositif d'amortissement des microcomposants électroniques subissant des chocs, inspiré du pic-vert. En tant que produit de l'évolution, les arbres, qui subissent régulièrement des chargements aérodynamiques, sont susceptibles de posséder des mécanismes de défense spécifiques.

Devant les différentes échelles temporelles des chargements subis par les arbres, plusieurs mécanismes adaptatifs ont récemment été découverts. Sur des temps longs, la thigmomorphogenèse permet aux arbres, et aux plantes en général, d'adapter leur croissance pour mieux résister aux chargements habituels de leur environnement (Telewski, 2006; Moulia *et al.*, 2006). Par exemple, un arbre dans un environnement venteux fera croître son tronc et ses branches plus en diamètre qu'en longueur (Watt *et al.*, 2005). Sur des temps courts et d'un point de vue statique, les travaux de Gosselin *et al.* (2010) ont montré que la flexibilité des plantes, en comparaison au cas rigide, permet une réduction de la force de traînée aérodynamique (Vogel, 1984). Ce mécanisme de reconfiguration augmente ainsi la résistance des plantes, notamment des arbres, aux chargements aérodynamiques (de Langre, 2012). De plus, en prenant en compte les contraintes mécaniques et la limite de rupture du bois, Lopez *et al.* (2011) ont montré que les ruptures

successives des branches d'un arbre, sous des écoulements intenses, surviennent avant la rupture du tronc, constituant un second mécanisme protecteur et spécifique aux chargements aérodynamiques extrêmes subis par l'arbre. Ces mécanismes statiques montrent la grande adaptation des arbres pour augmenter leur résistance aux contraintes externes. Il serait étonnant qu'il n'en soit pas de même concernant leur dynamique puisque les vibrations sont la première conséquence visible d'un chargement aérodynamique.

En dehors des vibrations contribuant à certaines fonctions biologiques comme la dissémination du pollen, des chargements aérodynamiques de forte intensité sont susceptibles de provoquer des vibrations de grande amplitude, potentiellement dangereuses pour l'arbre (Niklas, 1992). Des chargements provenant de fortes tempêtes ou d'ouragans se conçoivent facilement, mais d'autres types de chargements dynamiques extrêmes peuvent survenir durant la vie d'un arbre comme les avalanches de neige ou les chutes de pierres. Pour donner une idée de la résistance dynamique des arbres, la figure 1.5 montre une forêt de pins subissant le souffle d'une explosion atomique (Sauer *et al.*, 1954). Dissiper rapidement l'énergie mécanique reçue durant ces chargements extrêmes est une question de survie pour l'arbre ; son amortissement doit donc être optimisé.



FIGURE 1.5 – Forêt résistant à l'onde de choc d'une explosion nucléaire lors du test de Upshot-Knothole Grable en 1953. Image tirée du film déclassifié par le Département de l'énergie des États-Unis (<http://archive.org/details/gov.doe.0800015>).

### 1.2.1 Une dynamique particulière

Le comportement dynamique des arbres a été abondamment étudié, principalement pour des problématiques biologiques. En 1984, Scannell eu l'intuition dans sa thèse que les arbres devaient posséder un “principe de design qualitatif [...] bénéfique à leur survie dans des conditions de fortes turbulences atmosphériques”. Par la suite, Niklas (1992, p. 183) nota dans son livre sur la biomécanique des plantes que les “expériences indiquent que le branchement [...] amortit les fréquences propres de vibration”. Enfin, plus récemment, par des simulations numériques de l'architecture d'un pin maritime, Sellier *et al.* (2006) montrèrent que “l'amortissement du mouvement du tronc est réduit de moitié lorsque les oscillations des branches ne sont pas considérées”, pour conclure que “l'efficacité des mécanismes dissipatifs dépend directement de la topologie des branches”.

Avant tout, il est nécessaire d'éclaircir ce qui est généralement admis comme source d'amortissement dans les arbres. Premièrement, le bois est connu pour ces propriétés viscoélastiques, ce qui a été la source de matériaux bio-inspirés (Spatz *et al.*, 2004). Deuxièmement, les interactions entre l'arbre et l'air provoquent des forces dans la direction opposée à la vitesse locale dans l'arbre, apportant une dissipation fortement dépendante de l'amplitude de mouvement de l'arbre. Finalement, en considérant le mouvement global de l'arbre par la flexion du tronc, un autre mécanisme est souvent décrit dans la littérature comme “amortissement structurel”, (Brüchert *et al.*, 2003; Speck & Spatz, 2004; Spatz *et al.*, 2004; Brüchert & Gardiner, 2006; Moore & Maguire, 2007; Jonsson *et al.*, 2007; Castro-García *et al.*, 2008; Schindler *et al.*, 2010; Speck & Burgert, 2011). Ce troisième mécanisme est interprété comme le possible transfert d'énergie mécanique du tronc vers les branches, où elle sera ensuite dissipée par les deux mécanismes viscoélastiques et aéroélastiques susdits. Un premier modèle de ces transferts d'énergie, présenté à la figure 1.6, a été proposé par James *et al.* (2006) qui a modélisé la structure des branches de l'arbre comme une multitude d'oscillateurs couplés de type TMD. Simultanément, Spatz *et al.* (2007) ont montré expérimentalement la validité du concept de TMD multiple en mesurant des fréquences des branches proches de celle du tronc sur des pins de Douglas. Toutefois, comme mentionné précédemment, par définition du TMD (figure 1.3), ce mécanisme de transfert d'énergie entre les sous-parties de l'arbre n'est pas spécifique aux chargements extrêmes.

Plus récemment, en analysant la dynamique modale des structures d'un noyer et d'un

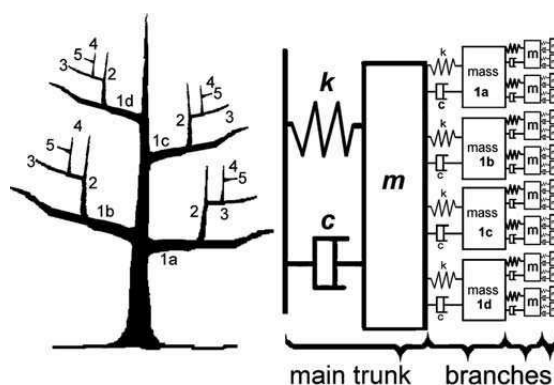


FIGURE 1.6 – Modèle linéaire de la dynamique d'un arbre selon James *et al.* (2006), validé expérimentalement par Spatz *et al.* (2007) sur des pins de Douglas.

pin grâce à une modélisation par éléments finis, Rodriguez *et al.* (2008) ont montré que les fréquences propres de l'arbre sont proches les unes des autres et plus particulièrement que les déformées modales sont fortement localisées dans l'architecture (figure 1.7).

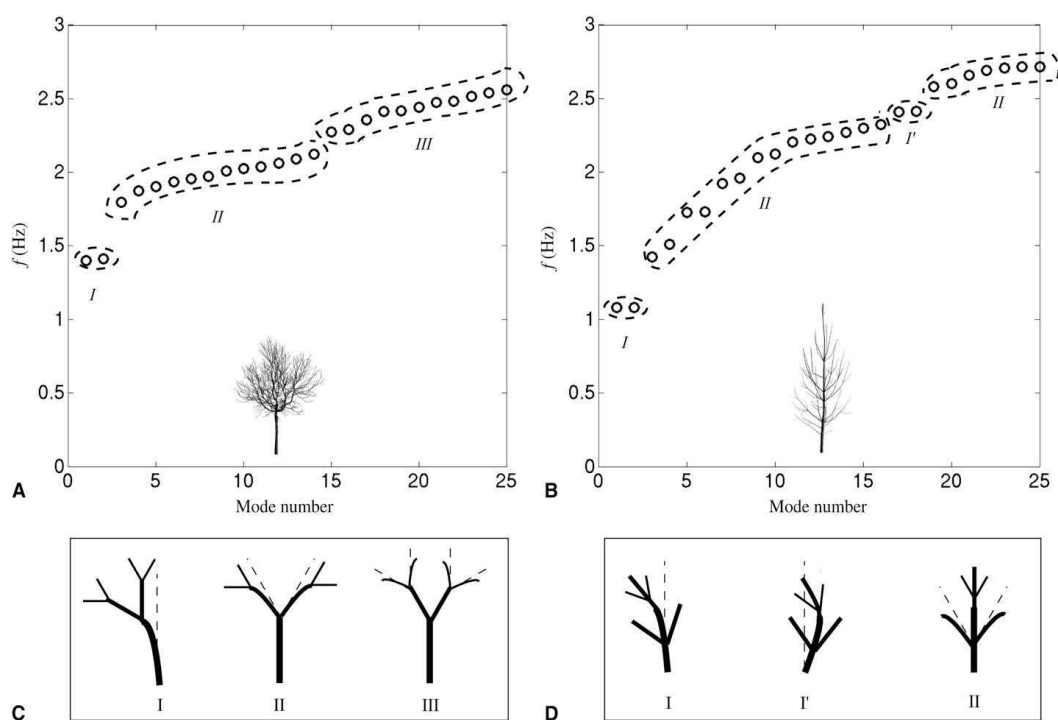


FIGURE 1.7 – Fréquences et localisations modales d'un noyer et d'un jeune pin par Rodriguez *et al.* (2008).



Bien que les géométries et les architectures semblent particulières et différentes d'un arbre à l'autre, Rodriguez *et al.* (2008) ont expliqué et généralisé ces caractéristiques en s'appuyant sur l'analyse d'échelle d'une architecture idéalement branchée. Dans sa thèse, Rodriguez (2009) ajoute que ces organisations spatiales et fréquentielles des modes propres de l'arbre permettent une répartition dans le branchage de la réponse à l'excitation par le vent.

Il semble donc que le branchement joue un rôle fondamental dans ces mécanismes protecteurs de l'arbre. Les travaux précédents ne se sont consacrés qu'à des phénomènes linéaires et donc non spécifiques à l'amortissement des vibrations de grandes amplitude. D'un point de vue mécanique, ces caractéristiques de densité et de localisation modale, liées à l'architecture de l'arbre, sont classiquement favorables à des transferts non linéaires d'énergie entre les modes propres. Ces transferts pourraient-ils constituer un mécanisme dissipatif spécifique aux chargements extrêmes ?

### 1.2.2 Les non-linéarités géométriques, sources d'amortissement ?

Une forte densité modale et une localisation spatiale des modes propres sont des ingrédients favorables à l'apparition de transferts d'énergie entre modes propres. Ils restent toutefois insuffisants. Ces transferts d'énergie étant non linéaires par définition, il manque un ingrédient : une source de non-linéarité. Or, puisque les arbres sont flexibles et subissent de grandes amplitudes de mouvement, les non-linéarités géométriques sont des candidats susceptibles de jouer ce rôle lors de chargements extrêmes. Seules quelques rares études sur la biomécanique des arbres ont pris en compte ces non-linéarités géométriques. Sellier *et al.* (2006) ont notamment inclus ce comportement non linéaire dans leurs simulations par éléments finis, mais sans étude systématique de l'influence de l'amplitude du mouvement. Miller (2005) a étudié l'influence des non-linéarités géométriques sur un modèle simple mais ne comportant qu'un seul mode propre. Une étude systématique de l'influence de l'amplitude du mouvement sur une structure branchée multimodale est donc nécessaire pour rendre compte d'éventuels transferts d'énergie entre les modes propres.

Par une architecture ramifiée apportant une forte densité modale avec une localisation spatiale des modes propres dans les branches, et par la présence de non-linéarités géométriques, l'énergie mécanique pourrait être plus efficacement dissipée, puisque mieux répartie dans l'arbre. Cette hypothèse serait alors cohérente avec un mécanisme d'amor-

tissement passif spécifique aux chargements extrêmes, protecteur de la partie vitale de l'arbre : le tronc. S'inspirer d'un tel mécanisme est donc envisageable puisque ce concept général d'amortissement passif par transferts non linéaires d'énergie entre modes propres a déjà démontré son efficacité dans diverses applications d'ingénierie (Vakakis & Gendelman, 2009).

### 1.3 Problématique de la thèse

Dans le but de développer un nouveau mécanisme d'amortissement passif destiné aux structures flexibles subissant des chargements extrêmes, cette thèse propose de s'inspirer des caractéristiques dynamiques particulières des arbres. Ces caractéristiques dynamiques étant intimement liées à l'architecture ramifiée des arbres, ce manuscrit défend l'idée que le branchement offre aux structures flexibles un mécanisme d'amortissement robuste et spécifique aux vibrations de grande amplitude.

Le second chapitre de cette thèse aborde la question fondamentale :

**Pouvons-nous modéliser simplement le bénéfice en termes d'amortissement apporté par le branchement ?**

Pour répondre à cette question, la dynamique en grands déplacements d'un modèle branché élémentaire à constantes localisées est étudiée. Ce modèle élémentaire à deux degrés de liberté permet d'étudier et caractériser l'origine physique des mécanismes non linéaires de transfert d'énergie entre les modes propres. Dans un second temps, il permet de définir et quantifier le mécanisme d'amortissement apporté par le branchement avec une caractéristique principale : sa spécificité à l'amortissement des vibrations de grande amplitude.

Par définition, le modèle du chapitre 2 est élémentaire et rien ne prouve la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement dans des structures plus complexes. Les chapitres 3 et 4 tentent donc de répondre graduellement à la question suivante :

**Le mécanisme d'amortissement par le branchement est-il toujours présent dans des structures branchées plus complexes ?**

Pour donner une première réponse à cette question, le chapitre 3 se consacre à la robustesse du mécanisme d'amortissement identifié au chapitre 2, en complexifiant la source de dissipation. En effet, l'amortissement effectif nécessite la présence d'un terme dissipatif qui avait été choisi linéaire et localisé sur les branches dans l'étude du chapitre précédent. Les effets d'autres types de dissipation sur le mécanisme d'amortissement par le branchement sont donc étudiés, notamment une dissipation de type traînée aérodynamique répartie sur le tronc et les branches.

Le chapitre 4 porte sur la généralisation à des structures continues et à la robustesse du mécanisme devant d'autres types d'excitation. Le mécanisme d'amortissement par le branchement est caractérisé et quantifié sur un modèle branché composé d'éléments de type poutre, par deux méthodes d'excitation. La première méthode est une procédure de type lâcher, analogue à celle utilisée précédemment. Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés avec ceux obtenus par une excitation par forçage à la base du tronc. Enfin, une expérience illustrative du mécanisme d'amortissement par le branchement sera présentée sur une structure branchée.

Les trois chapitres précédents ont porté sur l'identification, la caractérisation et la quantification du mécanisme d'amortissement par le branchement. Le chapitre 5 porte sur son applicabilité avec un objectif double. Premièrement, dans une perspective d'ingénierie, en se posant la question suivante :

### **Pouvons-nous l'appliquer à l'amortissement curatif de structures ?**

Pour y répondre, un modèle d'amortisseur curatif branché de rotation sera développé, inspiré du principe du Tuned-Mass-Damper. Les performances de cet amortisseur branché curatif, nommé TMBD pour Tuned-Mass-Branched-Damper, seront comparées aux performances maximales d'un TMD équivalent.

Puisque ce mécanisme d'amortissement par le branchement a été inspiré des arbres, ce chapitre a pour second objectif, cette fois du point de vue biologique, de répondre à la question suivante :

### **Les arbres possèdent-ils un tel mécanisme d'amortissement et en quoi la ramification l'influence-t-elle ?**

Dans ce but, les caractéristiques principales du mécanisme d'amortissement par le branchement, identifiées dans les chapitres précédents, seront confrontées aux mesures faites

sur les arbres, extraites et adaptées de la littérature. Par la suite, le développement d'un modèle ramifié discret, basé sur le modèle du chapitre 2, permettra d'étudier l'influence de la ramification sur ce mécanisme d'amortissement par le branchement. Enfin, les mécanismes d'amortissement par le branchement de deux modèles continus ramifiés seront quantifiés, basé sur le modèle du chapitre 4.

Un dernier chapitre propose de revenir sur tous les éléments de réponse à ces questions qui défendent l'idée que le branchement est bénéfique à l'amortissement des vibrations de grande amplitude des structures flexibles. Enfin, quelques perspectives offertes par ce mécanisme d'amortissement par le branchement seront présentées.



# Chapitre 2

## Modèle branché discret

Le but de ce chapitre est de démontrer et caractériser le bénéfice en termes d'amortissement qu'offre le branchement sur un modèle branché à deux degrés de liberté. Dans un premier temps, la description du modèle par ses équations du mouvement permet la compréhension des principes physiques à l'origine d'un couplage non linéaire entre les modes propres. Ceci permet d'introduire, dans un second temps, le concept et la définition d'amortissement par le branchement : l'amortissement global de la structure provenant de transferts non linéaires d'énergie vers les branches. Enfin, une étude paramétrique est menée afin de caractériser précisément ce mécanisme. Les résultats et les méthodes développées ici serviront de base pour les études, les développements et les applications de ce mécanisme dans les chapitres suivants.

La majorité des résultats présentés ici a été publiée dans le journal '*Bioinspiration & Biomimetics - IOP*'. Cette publication est jointe en annexe D.

## 2.1 Définition du modèle

### 2.1.1 Géométrie et cinématique

Le modèle est défini par trois barres rigides, articulées entre elles en rotation et supportant trois masses localisées (figure 2.1).

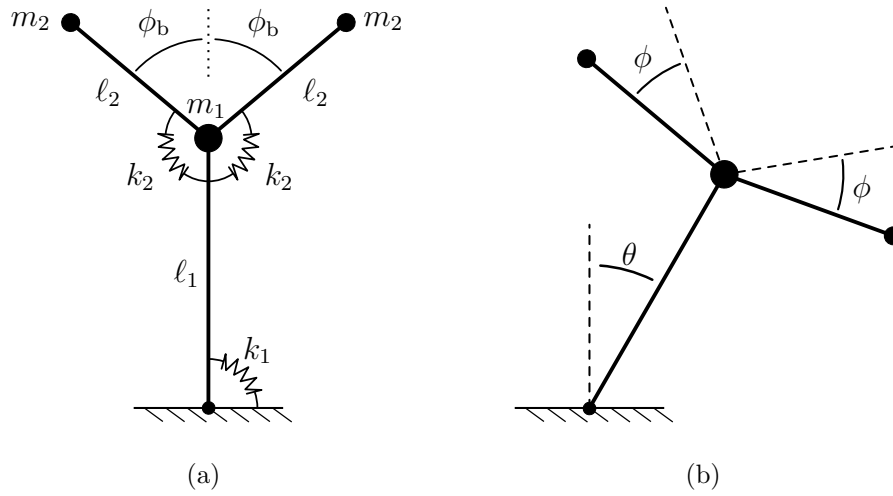


FIGURE 2.1 – Le modèle branché élémentaire. (a) Géométrie au repos. (b) Cinématique paramétrée par l'angle du tronc  $\theta$  et l'angle des branches  $\phi$ .

Par analogie biologique, la première barre articulée en rotation au sol d'une longueur  $\ell_1$  et supportant la masse  $m_1$  est dénommée 'tronc'. Les deux barres articulées en haut du tronc, symétriques par rapport à l'axe du tronc, ayant une longueur  $\ell_2$  et supportant chacune une masse  $m_2$  sont dénommées 'branches'. De plus, chaque branche forme un angle de branchement au repos  $\phi_b$  par rapport à l'axe du tronc. Enfin, un ressort de rotation de raideur de rotation  $k_1$  relie le tronc au sol et chaque branche est reliée au tronc par une raideur de rotation  $k_2$ .

Afin de simplifier la cinématique du modèle, le mouvement se fait dans le plan et un mouvement symétrique par rapport à l'axe du tronc est imposé aux branches (figure 2.1b). La cinématique du modèle est alors décrite par deux variables temporelles,  $\theta(t)$  pour l'angle de rotation du tronc et  $\phi(t)$  pour le mouvement relatif des branches par rapport au tronc.

## 2.1.2 Équations du mouvement

L'obtention des équations du mouvement sur les deux degrés de libertés  $\theta$  et  $\phi$  du modèle se fait en utilisant les équations de Lagrange. Il suffit d'exprimer les énergies cinétiques et potentielles du modèle. L'énergie cinétique s'exprime comme la somme des énergies cinétiques des trois masses :

$$E_c = \frac{1}{2} \left( (m_1 \ell_1^2 + 2m_2(\ell_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\phi_b + \phi) + \ell_2^2)) \dot{\theta}^2 + 2m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}^2 \right). \quad (2.1)$$

De même, l'énergie potentielle est la somme des énergies potentielles des trois ressorts de rotation, soit

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1 \theta^2 + 2k_2 \phi^2). \quad (2.2)$$

Par conséquent, le système des équations d'évolution s'écrit

$$\begin{aligned} J_\theta \ddot{\theta} + k_1 \theta &= 4m_2 \ell_1 \ell_2 \left[ \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi_b + \phi) - \ddot{\theta} (\cos(\phi_b + \phi) - \cos \phi_b) \right], \\ 2m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi} + 2k_2 \phi &= -2m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin(\phi_b + \phi), \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $(\dot{-})$  désigne la dérivée par rapport au temps et

$$J_\theta = m_1 \ell_1^2 + 2m_2 (\ell_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos \phi_b + \ell_2^2). \quad (2.4)$$

Le système d'équations (2.3) a été écrit de telle sorte que les termes linéaires soient à gauche et les termes non linéaires à droite. Nous conserverons cette convention dans toute cette thèse. En notant le vecteur de déplacement généralisé  $[\theta, \phi]$ , les deux modes propres du système linéaire sont directement  $[1, 0]$  et  $[0, 1]$  puisqu'il n'y a pas de couplage linéaire entre  $\theta$  et  $\phi$ . Le premier mode propre, ne faisant intervenir que le mouvement du tronc en  $\theta$ , sera dénommé mode de tronc. De même, le second mode propre, ne faisant intervenir que le mouvement des branches en  $\phi$ , sera dénommé mode des branches. Les pulsations propres de ces deux modes propres sont respectivement

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{J_\theta} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{2k_2}{2m_2 \ell_2^2}. \quad (2.5)$$

Dans le but de faciliter l'étude dynamique de ce système, une réduction du nombre de



paramètres est effectuée par une analyse dimensionnelle. Les sept paramètres physiques initiaux peuvent être réduits à seulement trois paramètres adimensionnés. Bien que leur choix soit arbitraire, il est préférable de choisir des variables ayant un sens physique. Premièrement, nous faisons apparaître le rapport de la fréquence propre du mode des branches sur celle du mode de tronc, noté  $\Omega$ . Deuxièmement, le rapport de l'inertie de rotation du mode des branches sur celle du mode de tronc, le tout multiplié par le rapport des longueurs  $\ell_1/\ell_2$ , noté  $\Gamma$ . Enfin, l'angle de branchement  $\phi_b$  est conservé tel quel. Ces trois paramètres adimensionnés s'expriment par

$$\Omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \Gamma = \frac{2m_2\ell_2^2}{J_\theta} \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{2m_2\ell_1\ell_2}{J_\theta} \quad \text{et} \quad \phi_b. \quad (2.6)$$

Les nouvelles variables adimensionnelles sont : le temps adimensionné, noté  $\tau$ , défini à partir de la période du mode de tronc ; la variable adimensionnelle du mode de tronc notée  $\Theta(\tau)$  ; et la variable adimensionnelle du mode des branches notée  $\Phi(\tau)$ . Ces variables adimensionnelles s'expriment respectivement par

$$\tau = \omega_1 t, \quad \Theta(\tau) = \theta(t) \sqrt{\ell_1/\ell_2} \quad \text{et} \quad \Phi(\tau) = \phi(t). \quad (2.7)$$

Avec ces changements de variable, le système (2.3) devient

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \Theta &= 2\Gamma \left[ \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right], \\ \ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ce système étant non linéaire, sa dynamique dépend du niveau d'amplitude du mouvement, traduit par niveau d'énergie. Cette quantité d'énergie sera le paramètre principal de tout ce manuscrit. Elle est la somme de l'énergie cinétique, équation (2.1), et de l'énergie potentielle, équation (2.2), et s'exprime de manière adimensionnée par

$$E(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \Theta^2 + \dot{\Theta}^2 + \Gamma(\Omega^2 \Phi^2 + \dot{\Phi}^2) + 2\Gamma(\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \dot{\Theta}^2 \right]. \quad (2.9)$$

L'intérêt de ce modèle branché réside dans la présence de couplages non linéaires, et donc d'un transfert d'énergie, entre le mode de tronc et le mode des branches. Ce chapitre propose d'interpréter physiquement cet échange d'énergie, puis d'évaluer ses caractéristiques et ses dépendances aux paramètres géométriques et au niveau d'énergie.

## 2.2 Mécanisme de couplage

### 2.2.1 Interprétation physique

La mise en équation des couplages entre le mode de tronc et le mode des branches, système d'équations (2.8), montre la présence de trois termes non linéaires et permet de comprendre l'origine physique des ces échanges d'énergies.

En premier lieu, nous remarquons que l'équation décrivant le mouvement du tronc possède un terme d'inertie de rotation, en facteur de  $\ddot{\Theta}$ , qui dépend non-linéairement de l'angle  $\Phi$  des branches. Ceci s'explique par le fait que lorsque les branches sont orientées vers le haut, dans l'axe du tronc, l'inertie de rotation apparente du mouvement du tronc augmente puisque le centre de rotation est à la base du tronc. À l'opposé, si les branches sont orientées vers le bas, l'inertie apparente de rotation diminue. Ainsi, la fréquence d'oscillation apparente du tronc dépendra du mouvement des branches.

La partie du couplage qui nous intéresse plus particulièrement se situe dans les deux autres termes non linéaires. Le terme non linéaire de l'équation décrivant le mouvement des branches représente la force gyroscopique s'exerçant sur les branches qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du tronc au carré ( $\dot{\Theta}^2$ ). Dans l'équation du mouvement du tronc, l'autre terme permet un retour d'énergie des branches vers le tronc puisque le système d'équations (2.8) est conservatif. Ainsi, ces couplages non linéaires ont des origines physiques simples qui permettent aux deux modes propres d'échanger de l'énergie.

### 2.2.2 Modes propres non linéaires

En dynamique des structures, la notion de mode propre non linéaire de Rosenberg (1962), étendu notamment par Shaw & Pierre (1993), est un outil de plus en plus utilisé. Cet outil est particulièrement utile pour les structures présentant des non-linéarités géométriques (Touzé *et al.*, 2004). Nous allons l'utiliser ici dans le but d'appréhender qualitativement les couplages entre le mode de tronc et le mode des branches à mesure que l'énergie, et donc l'amplitude du mouvement, augmente. Toutefois, nous nous contenterons d'une utilisation ponctuelle dans ce manuscrit pour des raisons explicitées par la suite.

Les modes propres non linéaires du système (2.8) sont obtenus grâce à la méthode numérique formalisée par Peeters *et al.* (2009). Cette méthode se base sur la définition

d'un mode non linéaire comme une solution périodique des équations du mouvement. Comme mentionné précédemment, par les termes non linéaires, le niveau d'énergie influence la dynamique du système et donc la forme de ces solutions périodiques. Ainsi, il s'agit de trouver les solutions périodiques du système (2.8) pour un niveau d'énergie totale  $E$  donné, équation (2.9). À très bas niveau d'énergie, lorsque les termes non linéaires sont négligeables, les solutions périodiques sont simplement les modes propres linéaires. La recherche des modes propres non linéaires peut donc s'effectuer par continuation à partir des modes propres linéaires pour des niveaux d'énergie croissants. Cette continuation s'effectue avec un algorithme de tir et correction (Peeters *et al.*, 2009). Pour ce faire, à chaque tir, le système d'équations (2.8) est résolu numériquement avec la fonction d'intégration temporelle “*Ode45*” du logiciel Matlab. Cette fonction implémente un schéma temporel de type Runge-kutta d'ordre 4 (Dormand & Prince, 1980). La figure 2.2 montre l'évolution des fréquences propres des modes non linéaires en fonction de l'énergie, accompagnée des déformés modales pour trois niveaux croissants d'énergie.

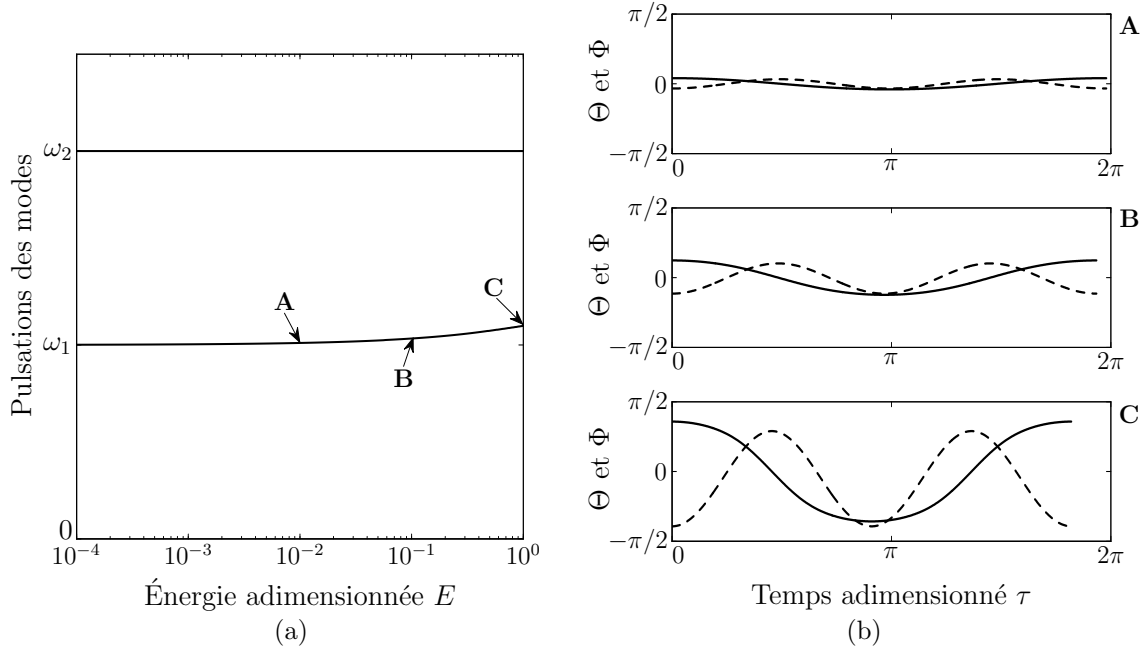


FIGURE 2.2 – Modes propres non linéaires du modèle branché à deux degrés de liberté obtenus par la méthode de Peeters *et al.* (2009). Les valeurs des paramètres adimensionnels sont  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\Omega = 2$  et  $\Gamma = 0,2$ . (a) Évolution des pulsations propres des modes non linéaires en fonction de l'énergie. (b) Trois déformées modales typiques du mode non linéaire de tronc pour  $E = 0.01$  (A),  $E = 0.1$  (B) et  $E = 1$  (C).

Le choix des valeurs des paramètres adimensionnels,  $\Omega = 2$ ,  $\Gamma = 0,2$  et  $\phi_b = \pi/2$  pour cette figure 2.2 sera justifié par l'analyse donnée en section 2.4.

Premièrement, nous remarquons sur la figure 2.2a que la pulsation du mode non linéaire des branches  $\omega_2$  ne change pas avec le niveau d'énergie. Ceci s'explique en observant que dans les équations (2.8), une condition initiale sur les branches uniquement ( $\Phi(0) \neq 0$  et  $\Theta(0) = 0$ ) implique que les termes non linéaires sont nuls, quelle que soit l'amplitude de mouvement des branches. Ainsi, le mode des branches reste un mode linéaire dans le sens où ni sa fréquence, ni sa déformée modale, ne sont affectées par le niveau d'énergie.

Deuxièmement, nous observons que la pulsation du mode non linéaire de tronc, initialement  $\omega_1$  pour le mode linéaire, change très légèrement avec le niveau d'énergie. C'est sa déformée modale qui est fortement affectée, comme le montre la figure 2.2b avec les déformées modales pour trois niveaux d'énergies croissantes. Alors que le mode linéaire de tronc ne fait pas intervenir le mouvement des branches, le mode non linéaire de tronc possède des oscillations d'amplitude comparable sur les branches, en  $\Phi$ , et sur le tronc, en  $\Theta$ . Ces oscillations des branches se font autour d'une valeur moyenne proche de 0, comme nous pouvons le voir à la figure 2.2b (C). Ceci explique le fait que la pulsation du mode non linéaire de tronc change peu avec l'énergie car l'inertie apparente du tronc est presque autant augmentée que diminuée durant une période.

Les deux modes non linéaires font intervenir le mouvement des branches. Une caractéristique des modes non linéaires est qu'ils représentent des attracteurs pour une dynamique amortie (Vakakis & Gendelman, 2009). Par conséquent, dans le cas de vibrations libres et amorties du système (2.8), à partir de conditions initiales quelconques, la dynamique sera attirée vers des mouvements de grande amplitude des branches. Ainsi, une énergie initialement apportée au tronc sera répartie non-linéairement sur les branches.

Bien qu'il soit possible de continuer l'analyse de ce modèle branché à deux degrés de liberté à l'aide des modes propres non linéaires, les recherches actuelles sont encore peu nombreuses pour des systèmes plus complexes où, par exemple, les non-linéarités ne sont pas localisées et les dissipations sont élevées (Vakakis & Gendelman, 2009). Pour cette raison et puisque les outils d'analyse dynamique plus classiques sont suffisants pour les besoins de cette thèse, les modes propres non linéaires ne seront plus utilisés.

## 2.3 Caractérisation de l'amortissement

D'un point de vue énergétique, puisque le système d'équations (2.8) est conservatif, le mode de tronc perd de l'énergie lorsque le mode des branches en gagne. Cette perte apparente d'énergie du mode de tronc n'est cependant que temporaire car le transfert d'énergie peut être réversible. Afin de dissiper cette énergie reçue par le mode de tronc et rendre ce transfert non linéaire d'énergie en partie irréversible, nous introduisons un amortissement sur le mode des branches. Le système d'équations (2.8) devient

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \Theta &= 2\Gamma \left[ \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right], \\ \ddot{\Phi} + 2\Omega\xi_b \dot{\Phi} + \Omega^2 \Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi), \end{aligned} \quad (2.10)$$

où  $\xi_b$  est le taux d'amortissement du mode des branches et représente un nouveau paramètre du modèle. Par conséquent, l'énergie reçue non-linéairement par le mode des branches est susceptible d'être dissipée, résultant en une décroissance globale de l'énergie du système. C'est ce mécanisme d'amortissement non linéaire que nous allons étudier.

### 2.3.1 Excitation par lâcher

Pour rendre compte aisément du transfert non linéaire d'énergie vers le mode des branches, le système (2.10) est initialement excité par une condition initiale de lâcher sans vitesse du tronc, qui s'écrit sous la forme

$$[\Theta(0), \dot{\Theta}(0), \Phi(0), \dot{\Phi}(0)] = [\Theta_0, 0, 0, 0]. \quad (2.11)$$

L'énergie initiale correspondante est notée  $E_0$ , équation (2.9). Pour simplifier, nous normalisons cette énergie en la multipliant par  $8/\pi^2$ . Ainsi,  $E_0$  vaut 1 lorsque  $\Theta_0 = \pi/2$ , correspondant à une condition initiale horizontale du tronc qui sera considérée comme la valeur maximale d'énergie pour ce modèle. C'est cette normalisation qui a été utilisée à la figure 2.2.

Cette méthode de lâcher sur le tronc permet de détecter, sans ambiguïté, la présence éventuelle d'un amortissement apporté par transferts non linéaires entre les modes propres. En effet, dans un système purement linéaire, cette énergie  $E_0$  resterait localisée dans le mode de tronc sans possibilité d'être dissipée. Nous exprimons respectivement l'énergie

du mode de tronc et celle du mode des branches par

$$E_{\Theta} = \frac{4}{\pi^2} \left( \dot{\Theta}^2 + \Theta^2 \right) \text{ et } E_{\Phi} = \frac{4}{\pi^2} \Gamma \left( \dot{\Phi}^2 + \Omega^2 \Phi^2 \right). \quad (2.12)$$

La figure 2.3 montre l'évolution temporelle typique de l'énergie totale  $E$  et des énergies modales, durant trois périodes à partir d'un lâcher d'amplitude maximale sur le tronc ( $E_0 = 1$ ). Notons que l'énergie totale  $E$ , équation (2.9), est la somme de  $E_{\Theta}$  et  $E_{\Phi}$  plus un terme d'énergie non linéaire pouvant être négatif. Ceci explique le fait que  $E_{\Theta}$  soit ponctuellement supérieure à  $E$  sur la figure 2.3.

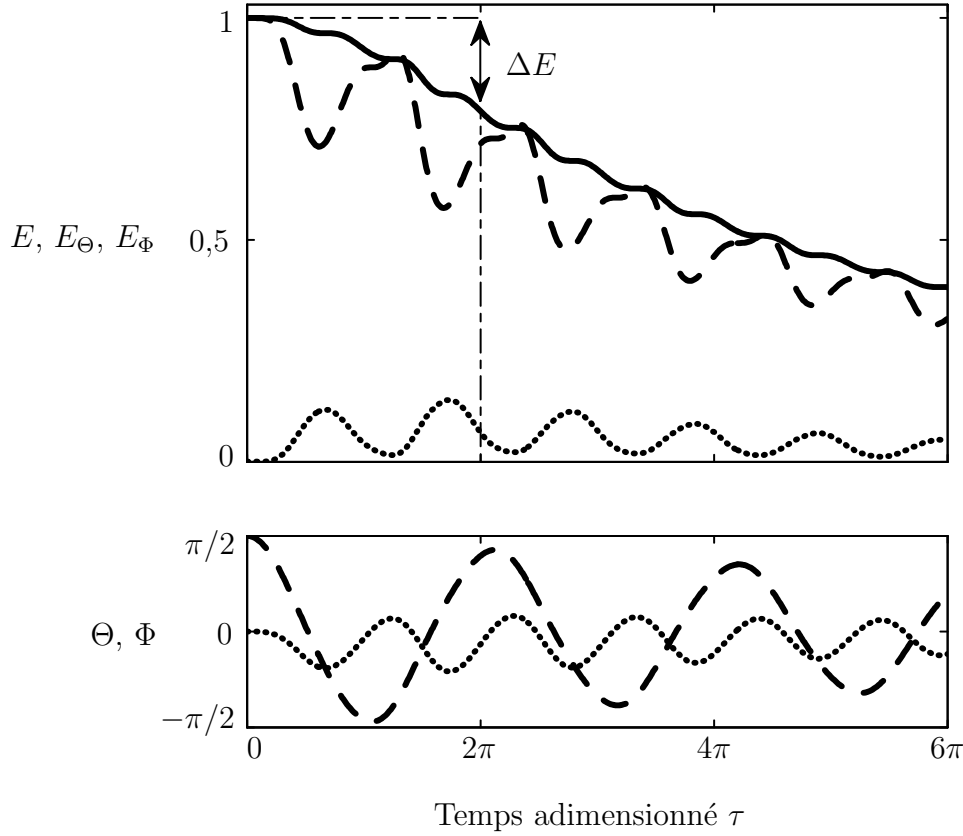


FIGURE 2.3 – Évolution temporelle typique de l'énergie totale  $E$ , équation (2.9), en trait continu (—) et des énergies modales, équation (2.12),  $E_{\Theta}$  en trait discontinu (---) et  $E_{\Phi}$  en trait pointillé (.....). La figure du bas expose les évolutions correspondantes des angles du mode de tronc  $\Theta$  et du mode des branches  $\Phi$ . La condition initiale de lâcher sur le tronc est donnée par l'équation (2.11) avec une énergie initiale maximale ( $E_0 = 1$ ), c.-à-d.  $\Theta_0 = \pi/2$ .

Notons que les courbes de la figure 2.3 sont obtenues pour les mêmes valeurs des paramètres adimensionnels que celles utilisées à la figure 2.2 avec en plus  $\xi_b = 0,2$ . Le choix de ces valeurs de référence sera justifié à la section 2.4. Le mode des branches, initialement sans énergie, reçoit de l'énergie par transfert non linéaire provenant du mode de tronc. Ce transfert provient de la force gyroscopique exercée par le mode de tronc sur le mode des branches. Une partie de cette énergie est alors dissipée dans le mode des branches résultant en une dissipation globale de l'énergie du système. Ce mécanisme dissipatif non linéaire, illustré par la figure 2.2, est nommé mécanisme d'amortissement par le branchement dans ce manuscrit.

### 2.3.2 Amortissement effectif

Dans le but de quantifier le mécanisme d'amortissement par le branchement, nous lui associons un taux d'amortissement qui représentera la dissipation supplémentaire de l'énergie totale du système. Ce taux d'amortissement effectif provient de la perte d'énergie totale sur une période du mode de tronc, notée  $\Delta E = E_0 - E(2\pi)$  et visualisée sur la figure 2.3. Cette perte d'énergie s'exprime comme le travail de la force d'amortissement du mode des branches sur une période du mode de tronc :

$$\Delta E = \frac{8}{\pi^2} \Gamma \int_0^{2\pi} 2\Omega \xi_b \dot{\Phi}^2 d\tau, \quad (2.13)$$

où le coefficient  $8/\pi^2$  provient de la normalisation choisie pour l'énergie  $E$ . Le taux d'amortissement effectif est défini par

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta E}{E_0}. \quad (2.14)$$

Ce taux d'amortissement effectif définit l'amortissement global apporté par le branchement et sera utilisé tout au long de ce manuscrit. Il est communément associé au facteur de qualité  $Q = 1/(2\xi_{\text{eff}})$ . Notons que la formulation de  $\Delta E$ , équation (2.13), pourra être adaptée au cas particulier du chapitre suivant. La suite de l'étude consiste à caractériser les effets de l'énergie initiale  $E_0$  et des paramètres  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\phi_b$  et  $\xi_b$  sur l'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$ .

## 2.4 Faibles amplitudes de mouvement

Dans un premier temps, nous considérons une faible énergie et donc des petites amplitudes initiales du tronc telles que  $\Theta_0 = \varepsilon$ , où  $\varepsilon \ll 1$  est un petit paramètre. La méthode de la *balance harmonique* (Nayfeh & Mook, 2008) est utilisée avec les angles  $\Theta$  et  $\Phi$  exprimés en séries de puissance de  $\varepsilon$  jusqu'à l'ordre deux par

$$\Theta(\tau) = \varepsilon \vartheta_1(\tau) + \varepsilon^2 \vartheta_2(\tau), \quad (2.15)$$

$$\Phi(\tau) = \varepsilon \varphi_1(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_2(\tau). \quad (2.16)$$

La condition initiale (2.11) implique directement

$$\vartheta_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_2(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0. \quad (2.17)$$

En substituant les équations (2.15) et (2.16) dans le système dynamique (2.10), et en utilisant les équations (2.17), les termes de premier ordre, en  $\varepsilon$ , s'équilibrent si

$$\vartheta_1 = \cos \tau \quad \text{et} \quad \varphi_1 = 0. \quad (2.18)$$

Notons qu'en arrêtant le développement à cet ordre, nous retrouvons logiquement la dynamique linéaire du système (2.10) sans couplage avec  $\Theta(\tau) = \Theta_0 \cos \tau$  et  $\Phi(\tau) = 0$ . En continuant le développement, les termes de second ordre, en  $\varepsilon^2$ , s'équilibrent si

$$\vartheta_2 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\varphi}_2 + 2\Omega\xi_b \dot{\varphi}_2 + \Omega^2 \varphi_2 = -\dot{\vartheta}_1^2 \sin \phi_b. \quad (2.19)$$

Ainsi, pour des vibrations de faible amplitude avec un développement jusqu'à l'ordre 2 faisant apparaître les premières non-linéarités, le système (2.10) se réduit à la seule équation

$$\ddot{\Phi} + 2\Omega\xi_b \dot{\Phi} + \Omega^2 \Phi = E_0 \sin \phi_b \cos 2\tau. \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est un simple oscillateur amorti et forcé harmoniquement, dont la dynamique peut être résolue analytiquement (Humar, 2002). De plus, nous observons que cet oscillateur, représentant le mouvement des branches, est forcé à sa résonance par le mouvement du tronc si  $\Omega = 2$ . Ceci est classiquement dénommée résonance interne 1:2 entre le mode de tronc et le mode des branches (Nayfeh & Mook, 2008). Cette résonance



définit la valeur de référence  $\Omega = 2$  qui a été utilisée aux figures 2.2 et 2.3. Dans la suite de ce manuscrit, l'influence de ce paramètre sera étudiée autour de cette valeur.

L'amplitude d'un oscillateur linéaire amorti est proportionnelle à l'amplitude de son forçage. Ainsi, dans l'équation (2.20), l'amplitude du mode des branches est proportionnelle à  $\Theta_0^2 \sin \phi_b$  et donc à  $E_0 \sin \phi_b$  puisque  $E_0 \propto \Theta_0^2$ . L'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$ , défini par les équations (2.14) et (2.13), s'exprime alors simplement par

$$\xi_{\text{eff}} = E_0 \Gamma \sin^2 \phi_b \bar{\xi}(\xi_b, \Omega), \quad (2.21)$$

où  $\bar{\xi}$  est une fonction dépendant uniquement de  $\xi_b$  et  $\Omega$ , dont le calcul analytique est fourni en annexe A. Notons que la normalisation choisie pour l'énergie se retrouve dans un facteur de la fonction  $\bar{\xi}$ , équation (A.6).

De façon remarquable, l'équation (2.21) montre que l'amortissement effectif est proportionnel à l'énergie initiale  $E_0$ . Un tel amortissement non linéaire est typique d'un oscillateur ayant une équation du type  $\ddot{\Theta} + \kappa \dot{\Theta}^3 + \Theta = 0$  avec  $\xi_{\text{eff}} \propto \kappa \dot{\Theta}^2 \propto \kappa E_0$  (Nayfeh & Mook, 2008).

L'équation (2.21) montre également que l'amortissement effectif est proportionnel au rapport de l'inertie de rotation du mode de tronc sur celle du mode des branches,  $\Gamma$ . Pour une géométrie typique du modèle telle que les branches soient deux fois plus petites que le tronc, c.-à-d.  $\ell_2 = \ell_1/2$  et  $m_2 = m_1/2$ , nous obtenons  $\Gamma \approx 0,2$ , d'après l'équation (2.6). Ceci définit la valeur de référence  $\Gamma = 0,2$  qui a été utilisée aux figures 2.2 et 2.3.

De plus, l'équation (2.21) montre que l'amortissement effectif est proportionnel à  $\sin^2 \phi_b$ . Par conséquent,  $\xi_{\text{eff}}$  est maximal pour un angle de branchement  $\phi_b = \pi/2$ , correspondant à une géométrie en forme de 'T' (figure 2.1). À l'opposé, pour une structure non branchée, avec  $\phi_b = 0$  ou  $\phi_b = \pi$ , l'amortissement effectif s'annule. Ceci donne un premier indice de l'importance du branchement et définit la valeur de référence  $\phi_b = \pi/2$  qui a été utilisée aux figures 2.2 et 2.3.

Enfin, les influences du rapport des fréquences  $\Omega$  et de l'amortissement artificiel  $\xi_b$ , sont données par une carte des niveaux de la fonction  $\bar{\xi}$ , équation (2.21), à la figure 2.4. Nous observons que l'amortissement effectif atteint un maximum pour une valeur du rapport des fréquences proche de  $\Omega = 2$ . Ceci est conforme au mécanisme de résonance interne 1:2 décrit précédemment. De plus, nous observons logiquement, sur la figure 2.4, qu'il n'y a pas d'amortissement effectif pour  $\xi_b = 0$  puisque l'énergie mécanique ne peut

être dissipée nulle part dans la structure.

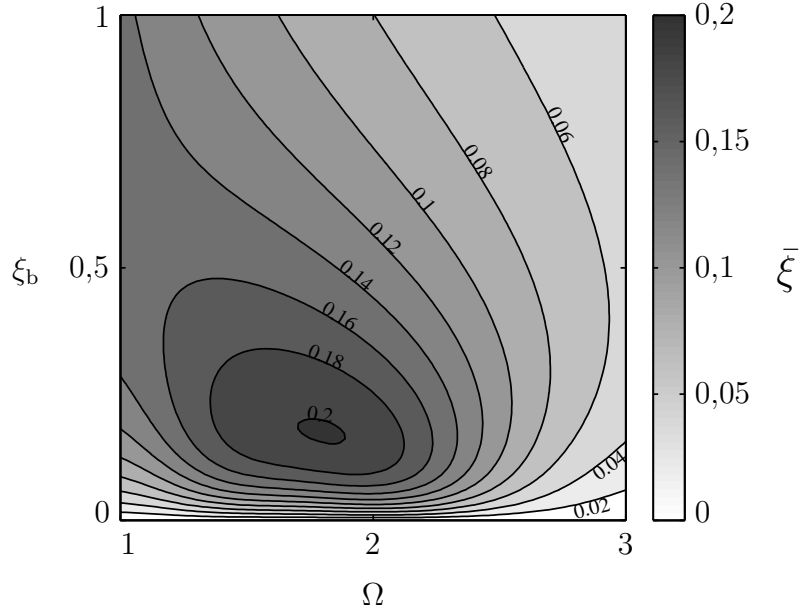


FIGURE 2.4 – Carte des niveaux de l'amortissement effectif normalisé  $\bar{\xi}$ , équation (2.21), apporté par le branchement en fonction de l'amortissement du mode des branches  $\xi_b$ , et du rapport de la fréquence du mode des branches sur celle du mode de tronc  $\Omega$ . L'expression analytique de la fonction  $\bar{\xi}$  est donnée en annexe A, équation (A.6).

Contrairement à l'intuition, le maximum de  $\xi_{\text{eff}}$  n'est pas atteint pour un fort taux d'amortissement du mode des branches mais pour une valeur intermédiaire proche de  $\xi_b = 0,2$ . Ceci s'explique du fait que, pour un amortissement critique du mode des branches ( $\xi_b = 1$ ), les branches sont pratiquement bloquées, réduisant ainsi l'amortissement effectif résultant. Ce comportement est courant pour d'autres types de structures amorties, comme dans le cadre de récupérateurs d'énergie (Singh *et al.*, 2012). Pour cette raison, une valeur du taux d'amortissement du mode des branches  $\xi_b = 0,2$  a été utilisée à la figure 2.3 et est définie comme valeur de référence.

Puisque ce manuscrit s'intéresse aux mouvements de grande amplitude, il est nécessaire d'étendre cette étude à une valeur arbitraire de l'énergie initiale  $E_0$ . Les influences des quatre paramètres seront étudiées autour des valeurs de référence

$$\phi_b = \pi/2 \quad , \quad \xi_b = 0,2 \quad , \quad \Omega = 2 \quad \text{et} \quad \Gamma = 0,2 \quad . \quad (2.22)$$

## 2.5 Grandes amplitudes de mouvement

Dans le but de prendre en compte la dynamique complète du modèle pour une énergie arbitraire, le système d'équations (2.10) est résolu numériquement comme pour les figures 2.2 et 2.3. L'amortissement effectif est calculé avec les équations (2.13) et (2.14). L'évolution de l'amortissement effectif en fonction de l'énergie initiale  $E_0$  est donné à la figure 2.5 en comparaison avec les résultats analytiques obtenus à la section précédente pour une énergie initiale faible.

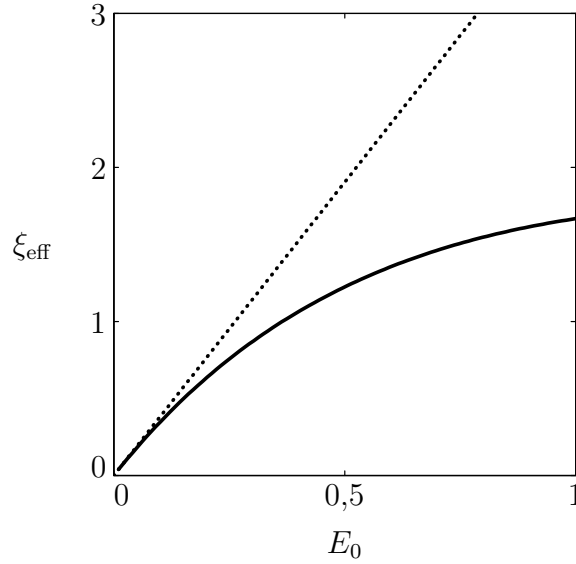


FIGURE 2.5 – Effet de l'énergie initiale  $E_0$  sur l'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  du modèle branché élémentaire. Simulation numérique en trait continu (—) et solution analytique, équation (2.21), pour de faibles énergies en trait pointillé (·····). Les valeurs des paramètres sont celles de référence, équation (2.22).

L'approche analytique de la section 2.4, équations (2.21), prédit la limite de la solution numérique lorsque l'énergie initiale tend vers 0. Ainsi, pour des faibles niveaux d'énergie, l'amortissement effectif augmente de façon proportionnel à  $E_0$ . À mesure que le niveau d'énergie augmente, bien que l'amortissement effectif ne soit plus proportionnel à  $E_0$ , il augmente de façon monotone et atteint un peu moins de 2% pour  $E_0 = 1$ . Nous sommes donc bien en présence d'un mécanisme d'amortissement spécifique aux mouvements de grande amplitude.

Il reste à connaître l'influence des paramètres du modèle. Dans ce but, les figures 2.6a–d

montrent les influences respectives des paramètres  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$ , et  $\Gamma$  sur l'amortissement effectif normalisées par  $E_0$ , pour trois niveaux d'énergie initiale.

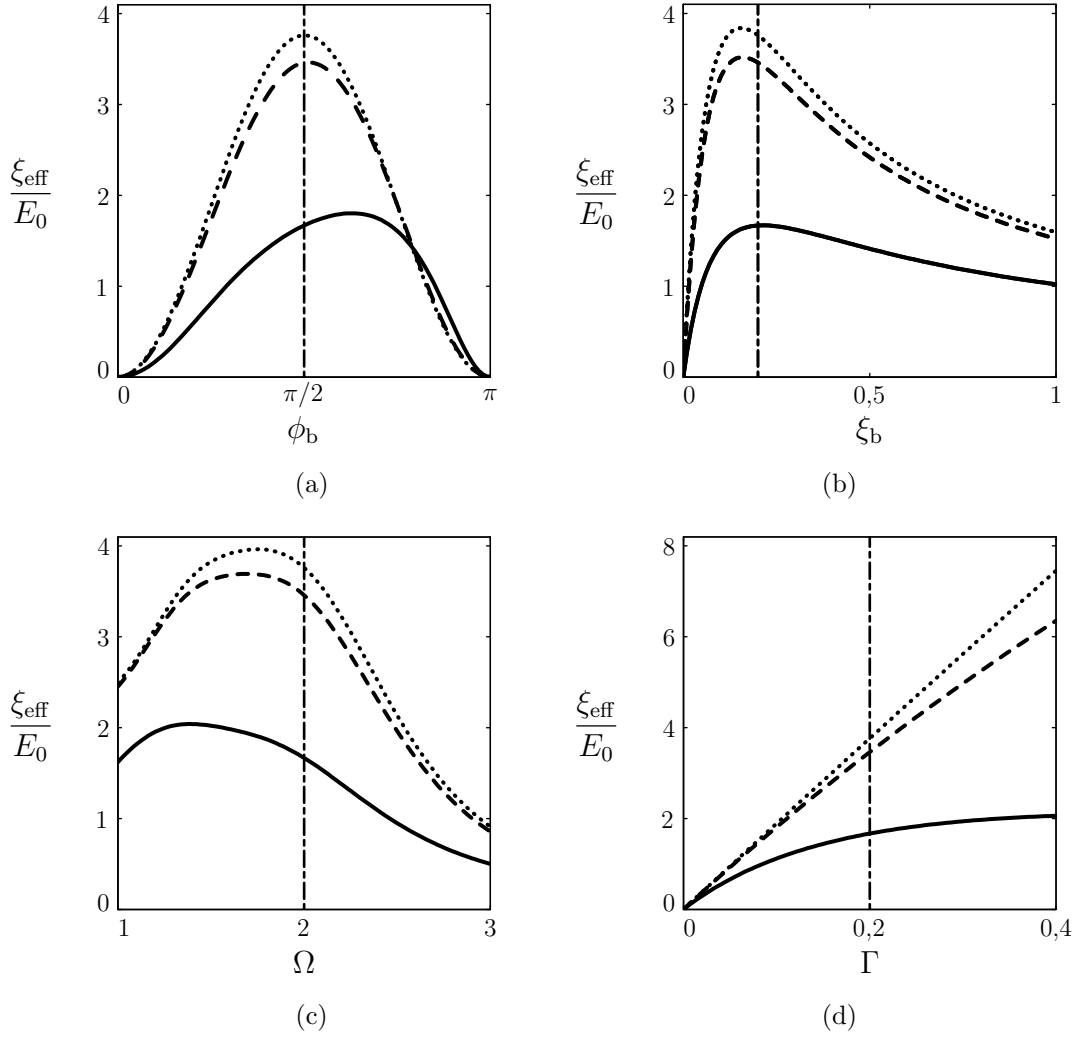


FIGURE 2.6 – Effets des quatre paramètres du modèle branché élémentaire sur l'amortissement effectif normalisé par l'énergie initiale,  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ , pour trois niveaux d'énergie,  $E_0 = 0,01$  ( $\cdots$ ),  $E_0 = 0,1$  ( $- -$ ) et  $E_0 = 1$  ( $—$ ). Les valeurs des paramètres sont celles de référence lorsqu'ils ne varient pas, équation (2.22), indiquées sur chaque figure par un trait vertical ( $- -$ ). (a) Effet de l'angle de branchement  $\phi_b$ . (b) Effet du taux d'amortissement du mode des branches  $\xi_b$ . (c) Effet du rapport de la fréquence du mode des branches sur celle du mode de tronc  $\Omega$ . (d) Effet du rapport de l'inertie de rotation du mode des branches sur celle du mode de tronc  $\Gamma$ .

Notons que les résultats provenant de la simulation numérique et de l'approche analy-

tique de la section précédente sont identiques pour une énergie initiale faible ( $E_0 = 0.01$ ). Ils sont donc représentés par les mêmes courbes en pointillés sur les figures 2.6a–d. Cette étude paramétrique permet d’optimiser le mécanisme d’amortissement par le branchement vis-à-vis des quatre paramètres.

Premièrement, sur la figure 2.6a, nous observons que l’amortissement effectif reste nul pour  $\phi_b = 0$  et  $\phi_b = \pi$ , quel que soit le niveau d’énergie. Le résultat analytique de l’équation (2.21), donnant une dépendance en  $\sin^2 \phi_b$  pour une énergie faible, reste valable pour une énergie intermédiaire ( $E_0 = 0.1$ ). Pour une énergie maximale ( $E_0 = 1$ ), nous remarquons que l’angle optimal de branchement passe de  $\phi_b = \pi/2$  à des valeurs légèrement supérieures, proches de  $\phi_b \approx 2\pi/3$ . Cette évolution s’explique physiquement en remarquant que la force d’excitation du mode des branches est de signe constant et négatif, équation (2.10). Par conséquent, la valeur moyenne d’oscillation de  $\Phi$  est inférieure à 0, comme nous pouvons le voir à la figure 2.3. Ainsi, le transfert vers les branches sera maximal si  $\phi_b$  compense cet effet dans le terme  $\sin(\phi_b + \Phi)$  d’excitation des branches, c’est à dire si  $\phi_b$  est légèrement supérieur à  $\pi/2$ . Dans le but d’optimiser l’amortissement effectif, un bon compromis serait de choisir une valeur de  $\phi_b$  entre  $\pi/2$  et  $2\pi/3$ .

Deuxièmement, la figure 2.6b montre que l’optimum  $\xi_b = 0.2$  pour l’amortissement du mode branche reste valable quel que soit le niveau d’énergie. Ainsi, cette valeur assure un amortissement effectif optimal. De plus, un fort niveau d’amortissement effectif est apporté pour une grande gamme de valeurs de  $\xi_b$  entre 0.05 et 1.

Troisièmement, de la même façon que pour la figure 2.6b, la figure 2.6c montre que la dépendance de l’amortissement effectif au rapport des fréquences  $\Omega$  change peu avec l’énergie initiale. Plus précisément, nous observons que l’amortissement effectif reste élevé pour une large gamme de valeurs entre  $\Omega = 1$  et  $\Omega = 2$ , notamment pour une énergie initiale élevée. Un choix du rapport  $\Omega$  entre ces deux valeurs assure donc un amortissement effectif optimal.

Enfin, la figure 2.6d montre que le résultat analytique donnant un amortissement effectif proportionnel au rapport des inerties  $\Gamma$  pour une énergie faible, équation (2.21), change peu pour une énergie intermédiaire ( $E_0 = 0.5$ ). Pour une énergie maximale ( $E_0 = 1$ ), cela n’est plus le cas. Toutefois, nous observons que l’amortissement effectif augmente de façon monotone avec  $\Gamma$ . Par conséquent, le rapport des inerties  $\Gamma$  doit être maximal pour optimiser le mécanisme d’amortissement par le branchement.

## 2.6 Discussion

L'objectif de ce chapitre 2 était de démontrer la validité du concept d'amortissement par le branchement par une modélisation simple.

Le modèle branché à deux degrés de liberté développé dans ce chapitre possède une caractéristique dynamique particulière provenant du branchement : ses modes propres sont localisés avec un mode de tronc et un mode des branches. L'écriture des équations du mouvement de ce modèle a montré la présence de couplages non linéaires entre les modes propres. Ces couplages proviennent des non-linéarités géométriques. Le mode des branches est notamment excité par une force gyroscopique non linéaire provenant de l'oscillation du mode de tronc. Grâce à l'ajout d'un amortissement dans le mode des branches, ces couplages offrent un mécanisme dissipatif, dénommé amortissement par le branchement, spécifique à l'amortissement des mouvements de grande amplitude.

Les éléments nécessaires à la présence de ce mécanisme sont au nombre de quatre. Premièrement, les transferts d'énergie entre les modes s'annulent pour une structure non branchée, c-à-d pour un angle de branchement de 0 ou  $\pi$ . La valeur optimale se situe entre un angle de  $\pi/2$  et  $2\pi/3$  suivant le niveau d'énergie. Deuxièmement, ce mécanisme s'appuie sur une résonance interne 1:2 entre le mode de tronc et le mode des branches. Toutefois, l'efficacité du mécanisme est optimale dans une gamme de fréquence propre du mode des branches comprise entre 1 à 2 fois celle du mode de tronc. Troisièmement, nous avons montré que l'inertie de rotation du mode des branches doit être non négligeable devant celle du mode de tronc pour offrir un amortissement suffisant. Enfin, quatrièmement, en tant que mécanisme dissipatif global de la structure, l'énergie transférée entre les modes doit être dissipée quelque part dans la structure, sans quoi, l'amortissement par le branchement serait nul. Nous avons montré que ce taux de dissipation devait être important, avec une valeur optimale de  $\xi_b = 20\%$ . Pour des branches de masse  $M$  et de raideur  $K$ , l'amortissement physique varie comme  $\xi_b \sqrt{MK}$ . Un tel taux d'amortissement sera donc difficilement atteignable pour des structures massives. Néanmoins, pour des structures légères, des phénomènes physiques tels que l'amortissement induit par une traînée fluide en écoulement transverse peuvent atteindre cet ordre de grandeur (Blevins, 1990), nécessaire au mécanisme d'amortissement par le branchement.

Dans le but d'une utilisation du mécanisme d'amortissement par le branchement dans des structures plus complexes, il est nécessaire de savoir si ce concept est robuste vis-à-

vis de sources dissipatives plus complexes, par exemple, celles provenant des interactions avec un fluide.

# Chapitre 3

## Robustesse du mécanisme

Au chapitre précédent, pour offrir un mécanisme d'amortissement par le branchement au modèle branché, nous avons mentionné la nécessité de la présence d'une source dissipative dans le mode des branches. À l'intérieur de ce troisième chapitre, nous examinons la robustesse du mécanisme d'amortissement en complexifiant cette source dissipative.

Dans un premier temps, nous étudierons la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement, décrit au chapitre 2, en modifiant uniquement le type d'amortissement introduit dans le mode des branches. Dans un second temps, nous examinerons l'influence d'une source dissipative globale, provenant de l'interaction avec un fluide externe au repos et répartie sur les deux modes propres.



### 3.1 Amortissement non linéaire du mode des branches

Nous reprenons le modèle branché élémentaire à deux degrés de liberté utilisé au chapitre 2. Cette fois, l'amortissement du mode des branches, initialement linéaire avec la vitesse des branches, est choisi proportionnel à une puissance de la vitesse. Le système d'équations (2.8) devient

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \Theta &= 2\Gamma \left[ \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right], \\ \ddot{\Phi} + 2\Omega \xi_b \dot{\Phi} |\dot{\Phi}|^{n-1} + \Omega^2 \Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $n$  représente le degré de non-linéarité de l'amortissement des branches. Le cas linéaire ( $n = 1$ ) servira de référence dans ce chapitre. L'équation (2.13) devient

$$\Delta E = \frac{8}{\pi^2} \Gamma \int_0^{2\pi} 2\Omega \xi_b \dot{\Phi}^2 |\dot{\Phi}|^{n-1} d\tau. \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Faibles amplitudes

Pour des petites amplitudes de mouvement, nous reprenons la méthode de la balance harmonique. Les mêmes développements en série que ceux de la section 2.4 sont utilisés, équations (2.15) et (2.16). Les calculs sont identiques à l'ordre 1 et donnent la dynamique linéaire du système (3.1). L'équilibre des termes d'ordre 2, en supposant  $n \geq 2$ , donne

$$\ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi = -\Theta_0^2 \sin \phi_b \sin^2 \tau. \quad (3.3)$$

On remarque, par comparaison à l'équation (2.20) du chapitre précédent, que le terme d'amortissement n'apparaît pas dans l'équation (3.3). Ceci est dû au fait que le terme d'amortissement non linéaire est d'ordre supérieur à  $\varepsilon^2$ . Ainsi, le système (3.1) se réduit à la simple équation d'un oscillateur non amorti et forcé avec les conditions initiales (2.11), c.-à-d.  $\dot{\Phi}(0) = \Phi(0) = 0$ .

Identiquement à la section 2.4 du chapitre précédent, l'amplitude du mode des branches  $\Phi$  dans l'équation (3.3) est proportionnelle à  $E_0 \sin \phi_b$ . L'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$ , défini par l'équation (2.14) et par l'intermédiaire de l'équation (3.2), s'exprime alors simplement

$$\xi_{\text{eff}} = E_0^n \Gamma (\sin \phi_b)^{n+1} \xi_b \bar{\xi}_n(\Omega), \quad (3.4)$$

où la fonction  $\bar{\xi}_n$  ne dépend que du rapport des fréquences  $\Omega$  puisqu'ici,  $\Phi(\tau)$ , solution de l'équation (3.3), ne dépend pas de  $\xi_b$ . Notons que la normalisation choisie pour l'énergie intervient uniquement dans l'expression de  $\bar{\xi}_n$  donnée en annexe B, équation (B.2).

L'équation (3.4) montre que pour un amortissement non linéaire du mode des branches, l'amortissement effectif résultant dépend non-linéairement de l'énergie initiale. La figure 3.1 présente l'évolution de la fonction  $\bar{\xi}_n$  en fonction de  $\Omega$  pour  $n = 2, 3, 4$  et  $5$ .

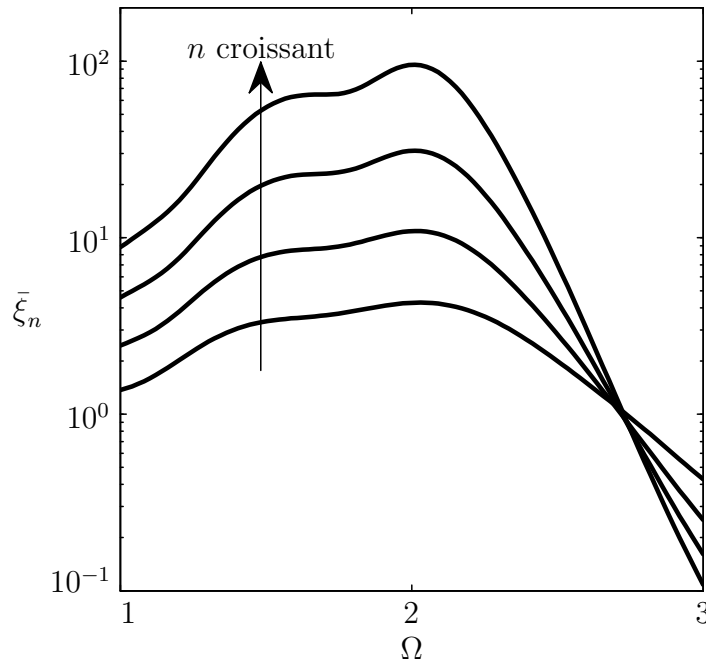


FIGURE 3.1 – Amortissement effectif normalisé  $\bar{\xi}_n$ , équation (3.4), en fonction du rapport des fréquences  $\Omega$ , pour un amortissement non linéaire du mode des branches avec  $n = 2, 3, 4$  et  $5$ .

Nous observons que l'amortissement optimal est atteint pour un rapport des fréquences  $\Omega = 2$ , quel que soit la puissance  $n$  de la non-linéarité de l'amortissement du mode des branches. Nous observons également que la fonction  $\bar{\xi}_n$  augmente rapidement avec  $n$ . Toutefois, cela ne signifie pas que l'amortissement effectif augmente de la même façon car il est également proportionnel à  $E_0^n$  qui diminue fortement avec  $n$  puisque  $E_0$  est faible. Cette approche n'étant valable que pour des mouvements de faible amplitude, il est nécessaire de connaître l'influence de ce type d'amortissement pour des grandes amplitudes de mouvement.

### 3.1.2 Grandes amplitudes

Pour des mouvements d'amplitude arbitraire, le système (3.1) est résolu numériquement. L'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  est calculé à partir des équations (3.2) et (2.14). L'évolution de l'amortissement effectif en fonction de l'énergie initiale  $E_0$  est exposé à la figure 3.2 pour quatre valeurs de la puissance  $n$  de l'amortissement du mode des branches, équation (3.1).

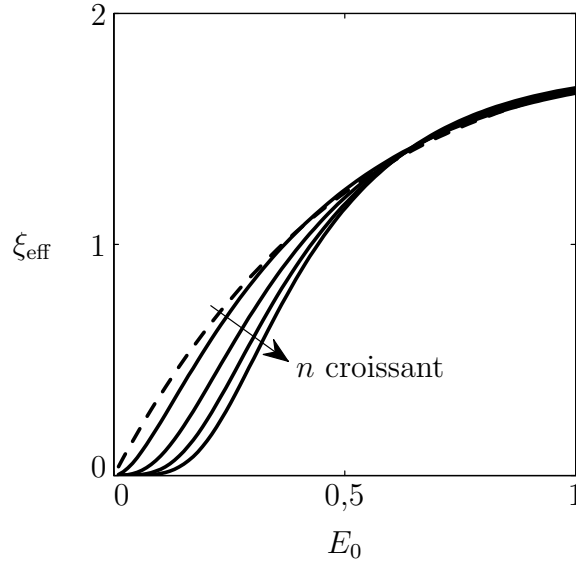


FIGURE 3.2 – Amortissement effectif en fonction de l'énergie initiale pour un amortissement non linéaire des branches avec  $n = 2, 3, 4$  et  $5$  en trait continu (—), et pour un amortissement linéaire en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres sont celles de référence, équation (2.22).

L'approche analytique à faible énergie de la section précédente, équations (3.4), correspond à la limite de la solution numérique lorsque  $E_0$  tend vers 0 avec un amortissement effectif proportionnel à  $E_0^n$ . Nous observons que ce comportement disparaît rapidement lorsque  $E_0$  augmente (figure 3.2). En effet, pour une énergie initiale élevée, entre 0,5 et 1, l'amortissement effectif est quasiment le même quel que soit  $n$ .

Cette apparente robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement, vis-à-vis du type d'amortissement du mode des branches, doit être confirmée par une analyse paramétrique. Les figures 3.3a–d exposent les influences respectives des paramètres  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$ , et  $\Gamma$  sur l'amortissement effectif pour une énergie initiale maximale ( $E_0 = 1$ ).

De façon générale, le type d'amortissement du mode des branches, linéaire ou non, a

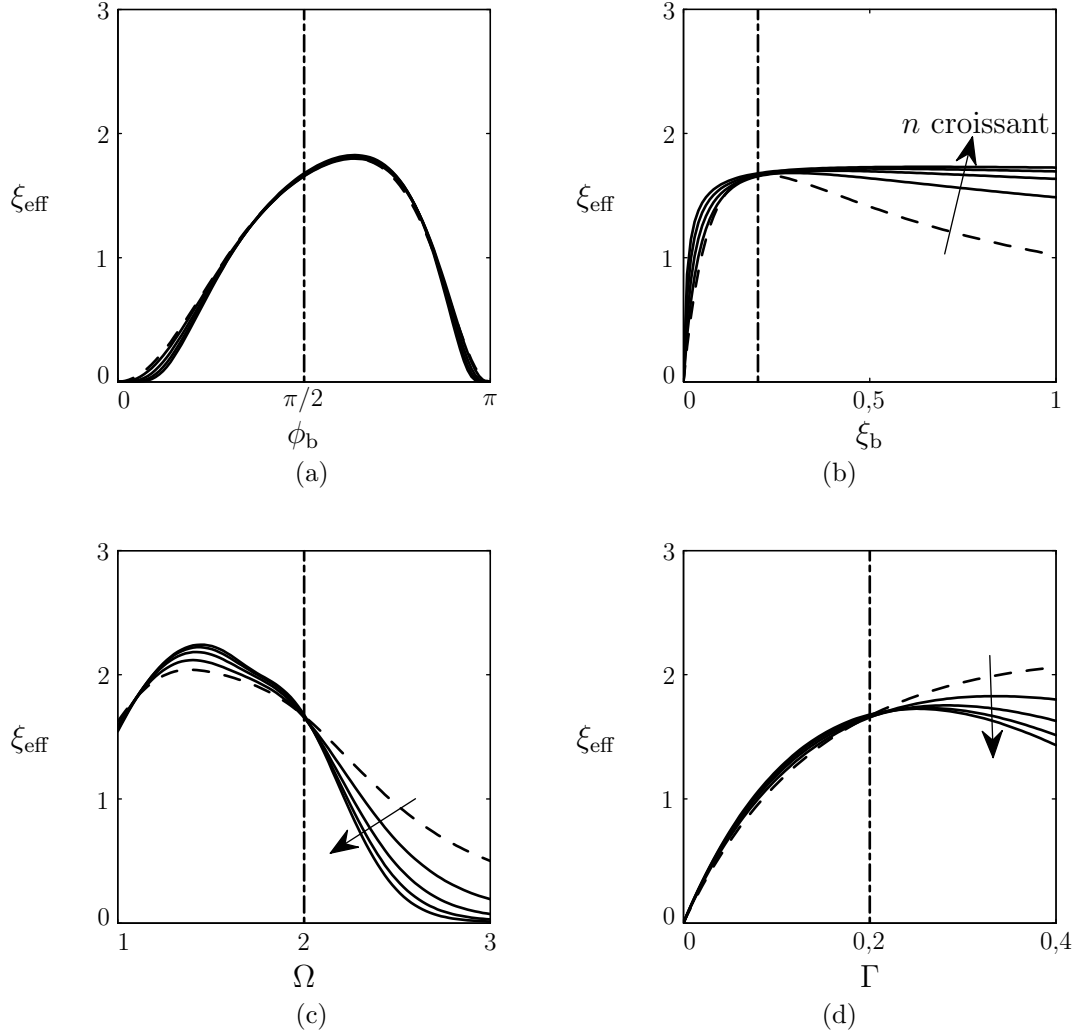


FIGURE 3.3 – Effets des quatre paramètres du modèle élémentaire sur l’amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  pour un niveau maximal d’énergie ( $E_0 = 1$ ) pour un amortissement non linéaire des branches avec  $n = 2, 3, 4$  et  $5$  en trait continu (—) et pour un amortissement linéaire en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres sont celles de référence lorsqu’ils ne varient pas, équation (2.22), indiquées sur chaque figure par un trait vertical (---). (a) Effet de l’angle de branchement  $\phi_b$ . (b) Effet du taux d’amortissement du mode des branches  $\xi_b$ . (c) Effet du rapport de la fréquence du mode des branches sur celle du mode de tronc  $\Omega$ . (d) Effet du rapport de l’inertie de rotation du mode des branches sur celle du mode de tronc  $\Gamma$ .

peu d’influence sur les dépendances paramétriques de l’amortissement effectif. Ce comportement est cohérent avec celui observé à la figure 3.2 et montre la robustesse du

mécanisme d'amortissement par le branchement vis-à-vis du type d'amortissement du mode des branches. Le type d'amortissement du mode des branches n'a presque aucune influence sur la dépendance à l'angle de branchement  $\phi_b$  (figure 3.3a). Plus l'amortissement du mode des branches est non linéaire, c'est à dire plus  $n$  est grand, plus la gamme de valeurs optimales pour  $\xi_b$  est étendue vers des valeurs supérieures (figure 3.3b). Nous observons sur la figure 3.3c que l'amortissement effectif augmente très légèrement avec  $n$  dans la gamme de valeur optimale pour le rapport des fréquences ( $1 \leq \Omega \leq 2$ ). Enfin, l'amortissement effectif n'augmente pas de façon monotone avec  $\Gamma$  et l'optimum se rapproche de la valeur de référence ( $\Gamma = 0,2$ ) à mesure que  $n$  augmente (figure 3.3d).

Bien que seules des valeurs entières de  $n$  aient été prises en compte dans le but de simplifier, les résultats présentés ici peuvent être étendus à des valeurs non entières. Dans cette section, comme dans le chapitre précédent, le mode de tronc a toujours été non amorti. On peut légitimement se demander si l'introduction d'un amortissement sur ce mode peut modifier le mécanisme d'amortissement par le branchement.

## 3.2 Amortissement aérodynamique

Cette section examine l'influence, sur le mécanisme d'amortissement par le branchement, d'une source dissipative plus naturelle et répartie sur les deux modes. Nous reprenons le système d'équations exprimé en variables dimensionnelles du modèle branché, équation (2.3), auquel nous ajoutons un modèle d'interaction fluide de type traînée.

### 3.2.1 Modèle d'interaction fluide

Nous donnons au tronc et aux branches, une forme cylindrique. La section de chaque segment est constante. Le tronc a un diamètre  $d_1$  et les branches un diamètre  $d_2$ . Comme indiqué sur la figure 3.4a, la structure oscille dans le fluide au repos et subie en conséquence une densité linéique de forces de traînée. Cette densité de force, notée  $\underline{f}$ , s'exerce localement (figure 3.4b) et est modélisée par

$$\underline{f}_i = -\frac{1}{2} \rho_f C_D d_i |\underline{V}_n| \underline{V}_n, \quad (3.5)$$

où  $i = 1$  pour le tronc,  $i = 2$  pour les branches,  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide et  $C_D$  est un coefficient de traînée lié à la géométrie (Blevins, 1990), supposé constant. Enfin,  $\underline{V}_n$  est la composante normale de la vitesse locale  $\underline{V}$ , qui s'exprime

$$\underline{V}_n = \underline{V} - (\underline{V} \cdot \underline{s}) \underline{s}, \quad (3.6)$$

où  $\underline{s}$  est le vecteur unitaire tangentiel au segment considéré, représenté à la figure 3.4b.

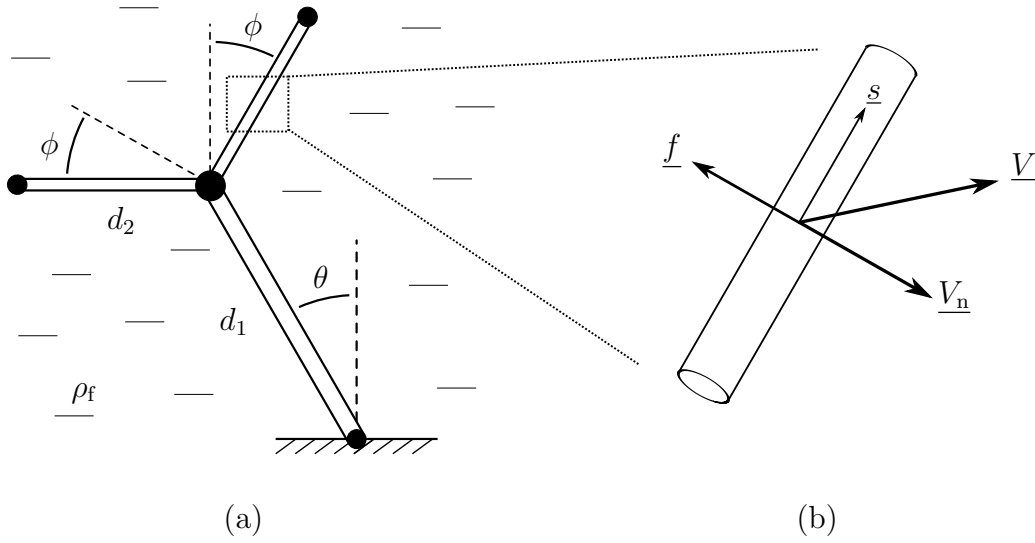


FIGURE 3.4 – (a) Modèle branché élémentaire en interaction avec un fluide au repos. (b) Modélisation des forces fluides s'exerçant localement, déterminées par les vitesses locales normales aux segments.

### 3.2.2 Équations du mouvement

Les projections modales des efforts exercés par le fluide, équation (3.5), sont notés  $M_\theta$  sur le mode de tronc et  $M_\phi$  sur le mode des branches. Le système d'équations (2.3) devient donc

$$\begin{aligned} J_\theta \ddot{\theta} + k_1 \theta &= 4m_2 \ell_1 \ell_2 \left[ \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right] + M_\theta, \\ 2m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi} + 2k_2 \phi &= -2m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi) + M_\phi, \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec

$$M_\theta = -\frac{1}{2}\rho_f C_D \left( d_1 \dot{\theta} |\dot{\theta}| \frac{\ell_1^4}{4} + d_2 \int_0^{\ell_2} \left( |\dot{\theta} S + \dot{\phi} s| (\dot{\theta} S + \dot{\phi} s) + |\dot{\theta} S - \dot{\phi} s| (\dot{\theta} S - \dot{\phi} s) \right) S ds \right), \quad (3.8)$$

et

$$M_\phi = -\frac{1}{2}\rho_f C_D d_2 \int_0^{\ell_2} \left( |\dot{\theta} S + \dot{\phi} s| (\dot{\theta} S + \dot{\phi} s) - |\dot{\theta} S - \dot{\phi} s| (\dot{\theta} S - \dot{\phi} s) \right) s ds, \quad (3.9)$$

où  $S = s + \ell_1 \cos(\phi_b + \phi)$ . Les calculs sont détaillés en annexe B.2.

Le système (3.7) est adimensionné avec les mêmes changements de variables qu'au chapitre précédent. En plus, trois nouveaux paramètres correspondant au fluide apparaissent : le rapport du diamètre des branches sur celui du tronc  $d = d_2/d_1$ , le rapport de la longueur des branches sur celle du tronc  $\Lambda = \sqrt{\ell_2/\ell_1}$  et le nombre

$$\mathcal{M} = C_D \frac{\rho_f d_1 \ell_1^3}{4m_2 \sqrt{\ell_1 \ell_2}} \quad (3.10)$$

qui peut être vu comme le rapport de l'inertie de rotation apportée par la masse de fluide ajoutée sur l'inertie de rotation de la structure. Ce nombre de masse  $\mathcal{M}$  est classique en interaction fluide structure (de Langre, 2002). Avec ces changements de variables, le système (3.7) devient

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \Theta &= 2\Gamma \left( \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right) - \frac{1}{4} \Gamma \mathcal{M} |\dot{\Theta}| \dot{\Theta} \\ &\quad - \Gamma \mathcal{M} d \Lambda \int_0^\Lambda \left( |\dot{\Theta} X + \dot{\Phi} x| (\dot{\Theta} X + \dot{\Phi} x) + |\dot{\Theta} X - \dot{\Phi} x| (\dot{\Theta} X - \dot{\Phi} x) \right) X dx, \\ \ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi) \\ &\quad - \mathcal{M} d \Lambda \int_0^\Lambda \left( |\dot{\Theta} X + \dot{\Phi} x| (\dot{\Theta} X + \dot{\Phi} x) - |\dot{\Theta} X - \dot{\Phi} x| (\dot{\Theta} X - \dot{\Phi} x) \right) x dx, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $x = s/\sqrt{\ell_1 \ell_2}$  et  $X = \Lambda x + \cos(\phi_b + \phi)$ . L'expression de l'énergie du système est identique à celle du chapitre 2, équation (2.9).

### 3.2.3 Calcul de l'amortissement effectif

Dans le système d'équations (3.11), la projection des forces fluides de traînée apporte des amortissements et des couplages non linéaires entre le mode de tronc et le mode des branches par des termes en ' $\dot{\Theta}^2$ ', ' $\dot{\Phi}^2$ ' et ' $\dot{\Theta}\dot{\Phi}$ '. L'amortissement est donc reparti sur les deux modes propres. Par conséquent, la méthode d'identification de l'amortissement effectif doit être redéfinie.

La méthode de lâcher sur le tronc, utilisé au chapitre 2, équation (2.11), est conservée. Nous proposons de redéfinir l'amortissement effectif par comparaison entre l'amortissement global du système (3.11) et l'amortissement qu'aurait ce système en imposant un mouvement nul du mode des branches, c.-à-d.  $\Phi = 0$ . Bloquer artificiellement les branches permet d'identifier les amortissements différents du mécanisme d'amortissement par le branchement. Celui-ci est alors défini par la différence entre l'amortissement du système (3.11) et celui du système bloqué décrit par

$$\ddot{\Psi} + \Psi = -|\dot{\Psi}|\dot{\Psi} \Gamma \mathcal{M} \left( \frac{1}{4} + 2d\Lambda \int_0^\Lambda |x\Lambda + \cos\phi_b|(x\Lambda + \cos\phi_b)^2 dx \right), \quad (3.12)$$

où  $\Theta$  a été remplacé par  $\Psi$  pour ne pas confondre les deux systèmes d'équations. Une méthode analogue sera utilisée dans le cadre d'une expérience dans le chapitre suivant.

La perte d'énergie après une période du mode de tronc, permettant de calculer l'amortissement effectif par l'équation (2.14), est donc donnée par

$$\Delta E = E(\Psi, 0, \dot{\Psi}, 0) - E(\Theta, \Phi, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}), \quad (3.13)$$

où les valeurs des paramètres  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\phi_b$ ,  $\Lambda$ ,  $d$  et  $\mathcal{M}$  sont les mêmes entre les deux systèmes.

### 3.2.4 Grandes amplitudes de mouvement

Comme dans les cas précédents, les systèmes d'équations (3.11) et (3.12) sont résolus numériquement. Les valeurs de référence des paramètres pour l'angle de branchement, le rapport des fréquences et le rapport des inerties, équation (2.22), ne changent pas. Pour les nouveaux paramètres, nous choisissons  $\Lambda = 1$  pour le rapport des longueurs et  $d = \sqrt{1/2}$  pour le rapport des diamètres. Cette valeur du rapport des diamètres



correspond à la loi de conservation des sections au niveau du branchement par de Vinci (Prusinkiewicz & Lindenmayer, 1991). Enfin, nous choisissons arbitrairement  $\mathcal{M} = 0,2$  pour le nombre de masse. D'après l'équation (3.10), cette valeur correspond, par exemple, à un tronc de diamètre d'environ 2 cm, de longueur d'environ 1 m, d'une masse de l'ordre de 0,1 kg oscillant dans l'air ( $\rho_f \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ) avec un coefficient de traînée de  $C_D = 1$ .

La figure 3.5 présente l'évolution de l'amortissement total en fonction de l'énergie initiale  $E_0$  pour les deux systèmes (3.11) et (3.12) avec les valeurs de référence des six paramètres.

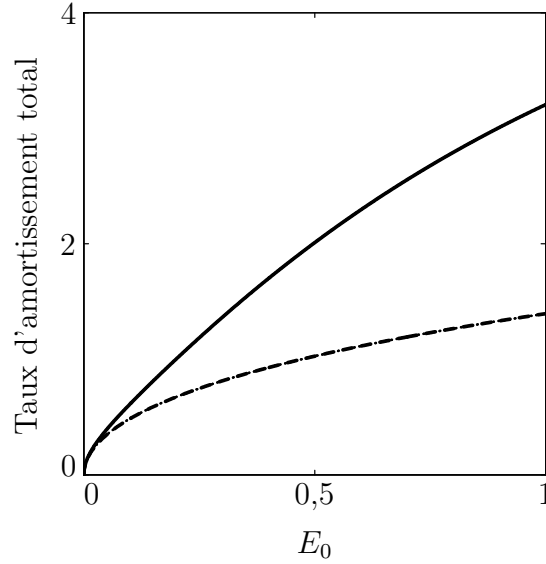


FIGURE 3.5 – Effet de l'énergie initiale  $E_0$  sur l'amortissement total du modèle branché en interaction avec un fluide au repos. Cas avec les branches libres (système 3.11) en trait continu (—). Cas avec les branches bloquées (système 3.11) en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres du modèle sont celles de référence, équation (3.12), avec  $\Lambda = 1$ ,  $d = \sqrt{1/2}$  et  $\mathcal{M} = 0,2$ .

Pour les deux systèmes, l'amortissement total augmente non-linéairement avec l'énergie  $E_0$ . À mesure que l'énergie augmente, la différence devient grande entre le système avec les branches libres et le système avec les branches bloquées. Pour une énergie maximale, le système avec les branches libres présente un amortissement deux fois plus important que celui du système bloqué. La figure 3.6 présente l'évolution de l'amortissement effectif par le branchement défini par la différence des courbes précédentes, en fonction de l'énergie initiale  $E_0$ .

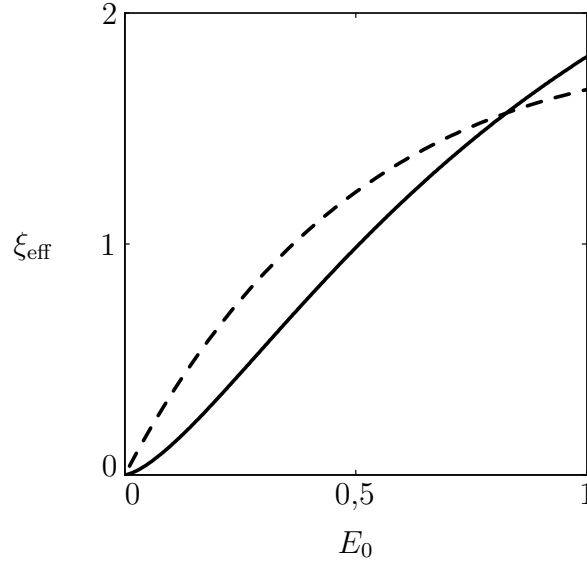


FIGURE 3.6 – Effet de l'énergie initiale  $E_0$  sur l'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  du modèle branché élémentaire en interaction avec un fluide au repos en trait continu (—). L'amortissement effectif est calculé à partir de la méthode de comparaison entre le cas où les branches oscillent librement et le cas où les branches sont bloquées artificiellement (section 3.2.3). Le cas d'un amortissement localisé dans le mode des branches du chapitre 2 (figure 2.5) est rappelé en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres du modèle sont les mêmes qu'à la figure 3.5.

L'amortissement effectif par le branchement augmente quasiment linéairement avec l'énergie initiale et atteint un peu moins de 2% pour une énergie maximale. Ce résultat est cohérent avec tous les résultats précédents présentés aux figures 2.5 (reproduite ici en trait discontinu) et 3.2. Le mécanisme d'amortissement par le branchement semble donc robuste vis-à-vis de la source de dissipation d'énergie dans le modèle élémentaire, que celle-ci soit linéaire ou non, localisée sur le mode des branches ou répartie sur les deux modes propres.

Afin de confirmer cette robustesse, nous procédons à une étude paramétrique. Les figures 3.7a–f exposent les influences respectives des paramètres  $\phi_b$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  et  $d$  sur l'amortissement effectif pour une énergie maximale.

Nous retrouvons sur la figure 3.7a une dépendance de l'amortissement effectif à l'angle de branchement semblable à ' $\sin^2 \phi_b$ ' avec une valeur optimale de  $\phi_b = \pi/2$ . Cette dépendance est en cohérence avec les cas précédents. Toutefois, à ce niveau d'énergie, la valeur optimale était proche de  $\phi_b = 2\pi/3$  dans le cas d'un amortissement localisé sur

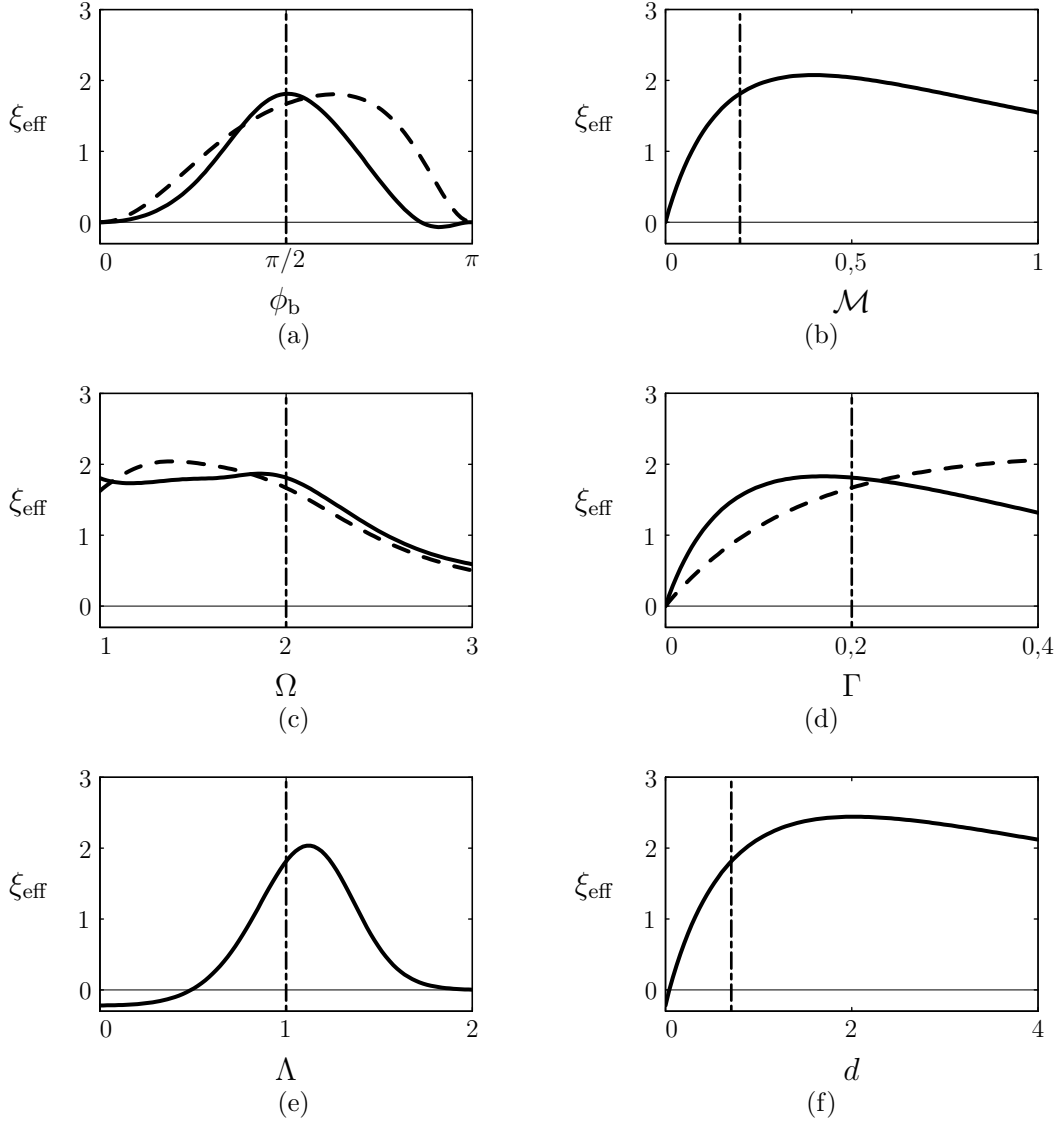


FIGURE 3.7 – Effets des six paramètres sur l’amortissement effectif du modèle élémentaire en interaction avec un fluide au repos, pour un niveau maximal d’énergie ( $E_0 = 1$ ). (a) Effet de l’angle de branchement  $\phi_b$ . (b) Effet du nombre de masse  $\mathcal{M}$ . (c) Effet du rapport des fréquences  $\Omega$ . (d) Effet du rapport des inerties  $\Gamma$ . (e) Effet du rapport des longueurs  $\Lambda$ . (f) Effet du rapport des diamètres  $d$ . Les valeurs des paramètres sont celles de référence, équation (2.22), avec  $\Lambda = 1$ ,  $d = \sqrt{1/2}$  et  $\mathcal{M} = 0,2$  lorsqu’ils ne varient pas. Elles sont indiquées sur chaque figure par un trait vertical (—). Les dépendances paramétriques (a), (c) et (d) sont comparées à celles du cas d’un amortissement linéaire et localisé dans le mode des branches du chapitre 2 (figure 2.6) en trait discontinu (---).

le mode des branches (figures 2.6a et 3.3a) . Notons que par la méthode d'identification de l'amortissement effectif utilisée ici, nous observons des valeurs légèrement négatives pour des valeurs particulières de  $\phi_b$  proches de  $\pi$ . Cet artefact sera expliqué par la suite avec l'analyse des figures 3.7e et 3.7f.

La dépendance de l'amortissement effectif vis-à-vis du nombre de masse  $\mathcal{M}$  (figure 3.7b) est semblable à celles observées pour le taux d'amortissement localisé sur le mode des branches (figures 2.6b et 3.3b). De façon analogue à l'effet de  $\xi_b$ , lorsque  $\mathcal{M}$  tend vers 0, l'amortissement effectif devient nul puisque l'énergie ne peut être dissipée nul part dans la structure. Pour une valeur très élevée de  $\mathcal{M}$ , l'énergie initiale est immédiatement dissipée par l'amortissement du mode de tronc qui devient très grand, inhibant le mécanisme d'amortissement par le branchement. De plus, l'amortissement effectif est élevé pour une grande gamme de valeur du nombre de masse  $\mathcal{M}$  comprise entre 0,2 et 1 avec une valeur optimale d'environ 0,4.

Nous observons sur la figure 3.7c que la dépendance à  $\Omega$  est similaire à celles observées pour les cas précédents (figures 2.6c et 3.3c) avec un rapport des fréquences optimal compris entre 1 et 2. La figure 3.7d montre une dépendance à  $\Gamma$  similaire à celle observée dans le cas d'un amortissement non linéaire du mode des branches (figure 3.3d). Contrairement au cas d'un amortissement linéaire des branches (figure 2.6d), l'amortissement effectif n'augmente pas de façon monotone et présente un optimum proche de la valeur de référence ( $\Gamma = 0,2$ ).

Sur la figure 3.7e, nous observons que le rapport des longueurs  $\Lambda$  est un paramètre critique pour l'amortissement effectif avec une gamme de valeurs optimales restreinte, comprise entre environ 0,8 et 1,3, avec une valeur optimale de 1,1. L'amortissement effectif décroît pour des valeurs supérieures, jusqu'à pratiquement s'annuler pour  $\Lambda = 2$ . Ce comportement s'explique physiquement en considérant un rapport  $\Lambda$  très grand dans le système d'équations (3.11). Une telle valeur équivaut à augmenter et concentrer la dissipation d'énergie dans les branches, rendant ainsi le mode des branches sur-amorti. Par conséquent, les systèmes (3.11) et (3.12) deviennent équivalents et l'amortissement effectif disparaît. L'effet du rapport des diamètres  $d$  (figure 3.7f) est très semblable aux effets décrits précédemment pour  $\mathcal{M}$  et  $\Gamma$ . Ce paramètre offre une gamme étendue de valeurs offrant un amortissement effectif suffisant avec une valeur optimale proche de  $d = 2$ .

Enfin, comme nous l'avons observé sur l'effet de  $\phi_b$  (figure 3.7a), ces deux dernières

figures, présentent un amortissement effectif légèrement négatif pour des valeurs particulières des paramètres :  $\phi_b$  proche de  $\pi$ ,  $\Lambda < 0,5$  et  $d$  proche de 0. Ces artéfacts proviennent du fait que la méthode de comparaison (section 3.2.3), utilisée pour identifier l'amortissement effectif, est restreinte à une seule période d'oscillation du tronc. Nous remarquons dans les équations (3.11) que lorsque  $\Lambda$  ou  $d$  tendent vers 0, la partie de l'énergie initiale du tronc, envoyée dans le mode des branches, ne peut être dissipée car ce mode n'est plus amorti. Par conséquent, l'amortissement du système initial (3.11) devient plus faible que celui du système (3.12) pour lequel toute l'énergie reste dans le mode de tronc, où elle peut être dissipée. Sur plusieurs périodes, cette énergie, stockée momentanément dans le mode des branches, revient dans le mode de tronc et peut être dissipée. Cet effet se retrouve dans le cas de l'angle de branchement  $\phi_b$  proche de  $\pi$  mais est compensé par le fait que le transfert vers le mode des branches s'annule pour  $\phi_b = \pi$ . Ceci montre la limite de la méthode de comparaison pour des valeurs extrêmes de certains paramètres. Néanmoins, nous avons montré qu'elle permet d'identifier et de caractériser efficacement la dissipation provenant uniquement du mécanisme d'amortissement par le branchement dans le cas d'une dissipation non linéaire répartie sur les modes.

### 3.3 Discussion

L'objectif de ce chapitre 3 était de démontrer la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement vis-à-vis de sources dissipatives plus complexes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré que le type d'amortissement du mode des branches, linéaire ou non, ne change quasiment pas les caractéristiques du mécanisme d'amortissement par le branchement sur le modèle branché à deux degrés de liberté utilisé au chapitre 2.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons examiné l'influence d'une source dissipative répartie sur les modes propres. Cette dissipation a été modélisée par l'interaction avec un fluide au repos sur le modèle branché du chapitre 2. La méthode utilisée a permis d'identifier clairement la partie de l'amortissement globale de la structure provenant du mécanisme d'amortissement par le branchement, malgré la présence d'autres types d'amortissement. Les résultats sont semblables à ceux du chapitre 2 avec un amortissement effectif spécifique à l'amortissement des mouvements de grande amplitude. L'étude paramétrique a montré le rôle important joué par le rapport des longueurs entre branches

et tronc qui doit être proche de 1 pour offrir un amortissement effectif suffisant dans ce cas de dissipation aérodynamique.

Les résultats du chapitre 3 permettent d'étendre la validité du concept d'amortissement par le branchement pour le modèle élémentaire développé au chapitre 2 à des sources non linéaires de dissipation d'énergie, réparties sur les modes propres. Toutefois, le modèle branché à deux degrés de liberté utilisé aux chapitres 2 et 3 reste élémentaire par définition. Il est nécessaire de savoir si ce mécanisme d'amortissement par le branchement peut être envisagé pour des structures complexes, présentant un plus grand nombre de degrés de liberté.



# Chapitre 4

## Amortissement de systèmes branchés continus

Le modèle branché à deux degrés de liberté, développé au chapitre 2, a permis d'identifier et caractériser le mécanisme d'amortissement par le branchement, spécifique à l'amortissement des mouvements de grande amplitude. À partir de ce modèle élémentaire, le chapitre 3 a montré que ce mécanisme est également robuste vis-à-vis d'autres types de dissipation, linéaires ou non, repartis dans la structure ou localisés dans les branches. L'objectif de ce quatrième chapitre est de démontrer l'applicabilité du mécanisme d'amortissement par le branchement à des structures plus complexes.

Dans un premier temps, ce chapitre se consacre à la caractérisation du mécanisme d'amortissement par le branchement sur un modèle branché continu. Conjointement avec les résultats du chapitre 2, ces travaux ont fait l'objet d'une publication dans le journal '*Bioinspiration & Biomimetics - IOP*', jointe en annexe D.

Dans un second temps, ce chapitre présentera les résultats d'une expérience illustrative sur une structure branchée flexible.



## 4.1 Modèle branché continu

Le mécanisme d'amortissement par le branchement, décrit sur le modèle branché élémentaire du chapitre 2, est maintenant analysé dans le cas d'un modèle branché continu. Deux types de résultats sont présentés. Premièrement, une approche analogue à celle développée dans le chapitre 2 sera utilisée afin de rendre compte de l'amortissement effectif apporté par le branchement. Deuxièmement, dans le but de montrer la robustesse du mécanisme vis-à-vis d'autres types d'excitation, nous analyserons ce mécanisme d'amortissement dans le cas d'un forçage dynamique du tronc.

### 4.1.1 Définition du modèle

Le modèle continu branché est constitué de trois poutres encastrées entre elles et formant un 'Y' symétrique (figure 4.1a).

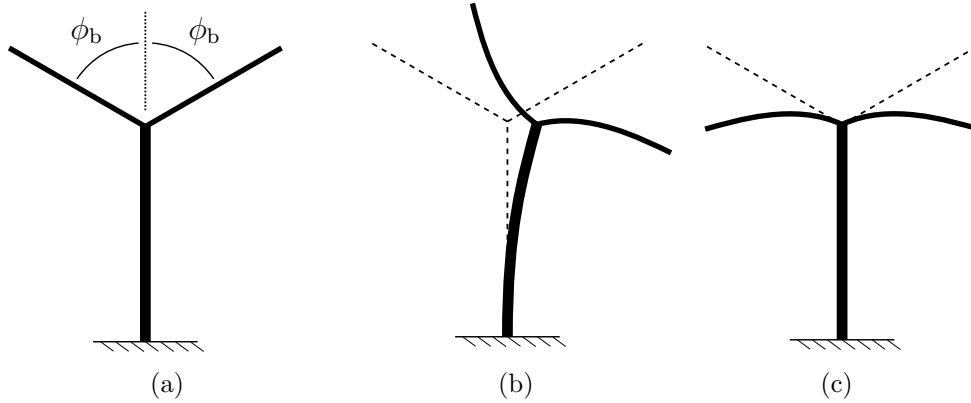


FIGURE 4.1 – Modèle branché continu. (a) Géométrie au repos. (b) Mode de tronc. (c) Mode des branches.

Chaque poutre du modèle est de forme cylindrique, de section constante et constituée d'un matériau linéairement élastique, homogène et isotrope. Par analogie biologique, comme aux chapitres précédents, la première poutre, encastrée à sa base, de longueur  $\ell_1$  et de diamètre  $d_1$  est dénommée tronc. Les deux autres poutres, encastrées symétriquement en haut du tronc avec un angle  $\phi_b$  par rapport à la direction du tronc, chacune de longueur  $\ell_2$  et de diamètre  $d_2$ , sont dénommées branches.

Les équations du mouvement sont résolues par la méthode éléments finis avec le logiciel CASTEM v.3M (Verpeaux *et al.*, 1988). Le modèle éléments finis est constitué d'éléments

poutre de type Euler-Bernoulli. Chaque segment du modèle est discrétisé avec dix de ces éléments. Tous les résultats présentés ci-après ont fait l'objet d'un test de convergence montrant qu'un tel raffinement du maillage est suffisant.

Puisque nous souhaitons rendre compte des non-linéarités géométriques provenant des mouvements de grande amplitude de ce modèle, la procédure incrémentale 'PASAPAS' du logiciel CASTEM est utilisée. Cette procédure utilise un schéma temporel de type Newmark où les équations d'équilibre mécanique sont écrites sur la configuration courante à chaque pas de temps (Verpeaux *et al.*, 1988).

Ce modèle éléments finis présente un grand nombre de modes propres. Les deux modes propres auxquels nous nous intéressons particulièrement sont représentés aux figures 4.1b et 4.1c : le mode des branches est localisé avec une flexion symétrique des branches uniquement, de façon analogue au mode des branches du modèle élémentaire du chapitre 2 ; le mode de tronc met en jeu la flexion du tronc et aussi légèrement la flexion des branches. Ce mode de tronc est donc qualitativement différent de celui, parfaitement localisé, du modèle branché élémentaire du chapitre 2. Les autres modes propres, plus complexes, sont susceptibles d'intervenir dans la dynamique du modèle et par conséquent, modifier le mécanisme d'amortissement par le branchement. Une section leur sera consacrée par la suite.

Enfin, pour décrire la géométrie du modèle, nous conservons des paramètres semblables à ceux utilisés pour le modèle élémentaire du chapitre 2. Nous choisissons deux paramètres adimensionnels : le rapport des fréquences propres et le rapport des masses modales respectivement donnés par

$$\Omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{\ell_1 m_2}{\ell_2 m_1}, \quad (4.1)$$

où  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , et  $m_1$ ,  $m_2$  sont les pulsations propres et les masses modales du mode de tronc et du mode des branches respectivement.

### 4.1.2 Méthode numérique

Pour les mêmes raisons qu'au chapitre 2, une dissipation est introduite sur le mode des branches uniquement. La matrice d'amortissement correspondante, notée  $\underline{\underline{C}}$ , est obtenue

à partir de la matrice de masse  $\underline{\underline{M}}$  du modèle éléments finis suivant la formulation

$$\underline{\underline{C}} = \frac{2\xi_b\omega_2}{m_2} (\underline{\underline{M}} \underline{\psi}_b) \otimes (\underline{\underline{M}} \underline{\psi}_b)^T, \quad (4.2)$$

où  $\underline{\psi}_b$  est le vecteur de la déformée modale du mode des branches, ' $\otimes$ ' le produit tensoriel et  $\xi_b$  le taux d'amortissement du mode des branches. Contrairement au choix classique d'un amortissement de Rayleigh, proportionnel aux matrices de masse et de raideur, la projection de la matrice  $\underline{\underline{C}}$  sur la base modale fournit un amortissement uniquement sur le mode des branches, laissant tous les autres modes non amortis.

Le mécanisme d'amortissement par le branchement est évalué pour deux conditions d'excitation, schématisées à la figure 4.2. Premièrement, par analogie avec la condition initiale donnée au modèle élémentaire du chapitre 2, une condition initiale de lâcher est simulée par une force statique et horizontale en haut du tronc, résultant en une déformation initiale de flexion du tronc (figure 4.2a). Deuxièmement, afin de démontrer la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement par rapport à d'autres types d'excitation, une seconde méthode consiste à forcer harmoniquement le mode de tronc (figure 4.2b).

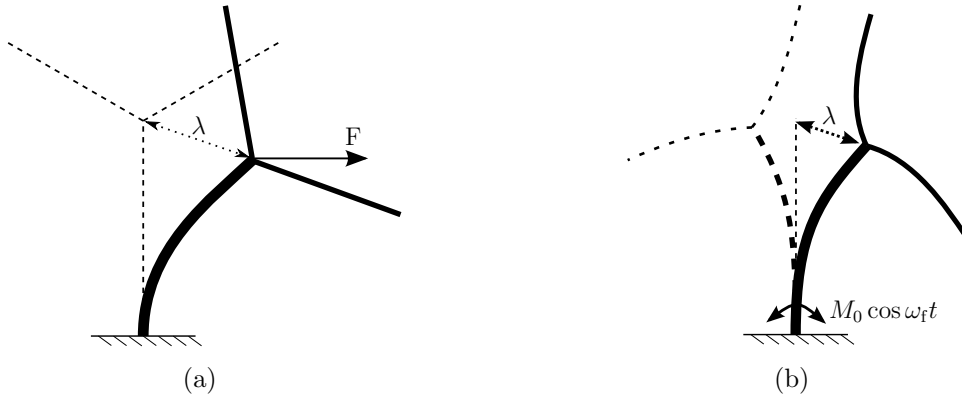


FIGURE 4.2 – Conditions d'excitation du modèle branché continu. (a) Condition initiale de lâcher par la flexion du tronc, obtenue par l'application d'une force horizontale et statique en haut du tronc. (b) Condition de forçage obtenue par l'intermédiaire d'un moment oscillant à la base du tronc.

Dans le cas du lâcher, l'énergie mécanique initiale, notée  $E_0$ , est normalisée telle qu'elle vaille 1 lorsque le déplacement total du haut du tronc  $\lambda$  (figure 4.2a) atteint la longueur du tronc, c.-à-d.  $\lambda = \ell_1$ . La projection de cette force horizontale sur la base des modes

linéaires est donnée au tableau 4.1 en termes d'énergie.

Mode de tronc	Mode des branches	Autres modes
94,3 %	0 %	5,7 %

Tableau 4.1 – Répartition modale de l'énergie initiale  $E_0$  provenant de la force statique dans la condition de lâcher.

L'énergie initiale apportée par la condition de lâcher est principalement localisée sur le mode de tronc. Bien qu'une faible partie de cette énergie soit présente sur les autres modes, le mode des branches ne possède pas d'énergie initiale, comme au chapitre 2. Ceci reste vrai quel que soit le niveau d'énergie initiale car la force est appliquée sur le tronc alors que le mode des branches, linéaire ou non linéaire (comme nous l'avons observé à la figure 2.2 pour le modèle branché du chapitre 2), reste uniquement localisé dans les branches. Ainsi, pour cette condition de lâcher, le mécanisme d'amortissement par le branchement est étudié avec le même critère qu'au chapitre 2 : d'après la décroissance de l'énergie totale durant la première période du mode de tronc, équations (2.13) et (2.14).

Dans le cas du forçage (figure 4.2b), le moment oscillant est exercé sur le tronc à une distance de  $\ell_1/10$  de la base avec une amplitude  $M_0$ . Nous notons  $\Omega_f$  le rapport de la fréquence d'excitation  $\omega_f$  sur celle du mode de tronc  $\omega_1$ . Nous nous intéressons à l'amplitude d'oscillation du tronc  $\lambda$  (figure 4.2b) atteinte en régime établi en fonction de  $\Omega_f$ , pour un niveau de forçage  $M_0$  donné. L'amortissement effectif est défini classiquement (Den Hartog, 2007) par

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\text{stat}}}{\lambda_{\text{réso}}} . \quad (4.3)$$

où  $\lambda_{\text{réso}}$  est l'amplitude maximale de la réponse fréquentielle à la résonance et  $\lambda_{\text{stat}}$  est l'amplitude statique, respectivement données par

$$\lambda_{\text{réso}} = \max_{\Omega_f} \lambda(\Omega_f) \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{stat}} = \lambda(\Omega_f=0) . \quad (4.4)$$

Ainsi, pour une fréquence de forçage proche de celle du mode de tronc, l'amplitude d'oscillation du tronc ne sera limitée que par le mécanisme d'amortissement par le branchement, puisque le mode de tronc n'est pas amorti. Enfin, les mêmes valeurs de référence des quatre paramètres  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $\phi_b$  et  $\xi_b$  que celles déjà utilisées au chapitre 2, équation

(2.22), sont choisies.

### 4.1.3 Excitation par lâcher

À partir de la condition initiale de lâcher, la simulation numérique de la dynamique libre du modèle continu produit des évolutions des énergies modales très semblables à celles obtenues pour le modèle élémentaire du chapitre 2.

La figure 4.3 expose l'amortissement effectif en fonction de l'énergie initiale  $E_0$ , accompagné d'un rappel du résultat du chapitre 2 (figure 2.5).

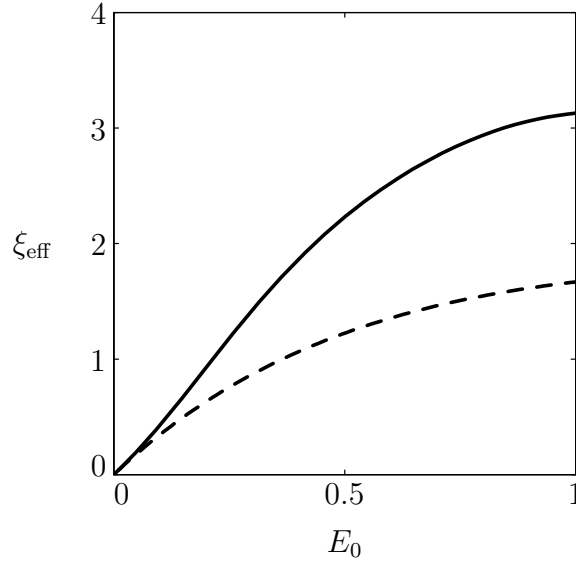


FIGURE 4.3 – Effet de l'énergie initiale  $E_0$  sur l'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  pour le modèle branché continu, en trait continu (—). Rappel du résultat pour le modèle élémentaire du chapitre 2 (figure 2.5), en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres sont celles de référence, équation (2.22).

De la même façon que pour le modèle élémentaire, nous observons sur la figure 4.3 que l'amortissement effectif du modèle branché continu augmente avec l'énergie. L'amortissement effectif dépasse légèrement 3% pour une énergie initiale maximale ( $E_0 = 1$ ). Ce comportement est très semblable à celui observé pour le modèle élémentaire du chapitre 2.

Comme pour le modèle élémentaire du chapitre 2, les effets des paramètres géométriques autour des valeurs de référence sont exposés aux figures 4.4a–d, normalisées par l'énergie initiale  $E_0$  et pour trois niveaux d'énergie initiale.

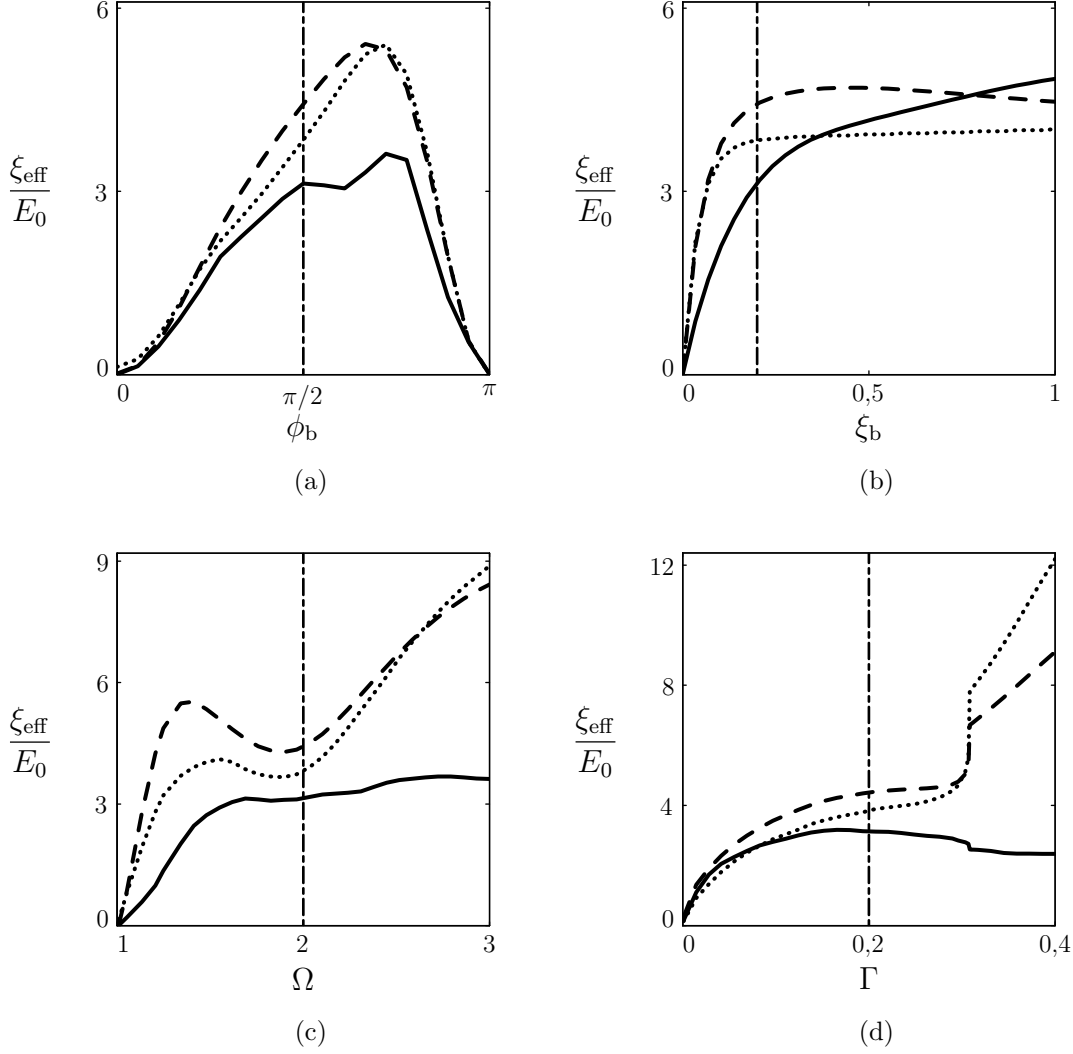


FIGURE 4.4 – Effets des quatre paramètres du modèle branché continu sur l’amortissement effectif normalisé par l’énergie initiale,  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ , pour trois niveaux d’énergie,  $E_0 = 0,01$  (.....),  $E_0 = 0,1$  (---) et  $E_0 = 1$  (—). Les valeurs des paramètres sont celles de référence lorsqu’ils ne varient pas, équation (2.22), indiquées sur chaque figure par un trait vertical (—).

De façon générale, nous observons sur la figure 4.4 que les dépendances aux paramètres sont proches de celles trouvées pour le modèle branché élémentaire du chapitre 2 (figure 2.6). Ce résultat est un premier indice de l’applicabilité du mécanisme d’amortissement

par le branchement pour des structures plus réalistes. Toutefois, en comparaison au cas du modèle du chapitre 2, plusieurs différences apparaissent avec des comportements plus complexes.

Premièrement, l'angle de branchement optimal, observé sur la figure 4.4a, est proche de  $\phi_b = 2\pi/3$ , quel que soit le niveau d'énergie  $E_0$ . Cette valeur optimale n'était observée et expliquée que pour une énergie initiale forte ( $E_0 = 1$ ) dans le cas du modèle du chapitre 2 (figure 2.6a). Ceci peut s'expliquer par des forces gyroscopiques appliquées de façon plus complexes sur les branches par le mouvement du tronc. Le niveau d'amortissement effectif pour la valeur de référence ( $\phi_b = \pi/2$ ) reste cependant fort.

Deuxièmement, nous observons sur la figure 4.4b que l'amortissement effectif augmente de façon quasi-monotone avec l'amortissement  $\xi_b$  du mode des branches, notamment pour une énergie initiale élevée. Ce paramètre présente une grande gamme de valeurs, entre 0,1 et 1, apportant un amortissement effectif élevé. Ceci suggère un schéma d'échange d'énergie modale plus complexe, impliquant d'autres modes de la structure.

L'hypothèse précédente est étayée par la figure 4.4c où l'amortissement effectif est bien supérieur pour un rapport des fréquences modales  $\Omega = 3$  plutôt qu'à la résonance pour  $\Omega = 2$ . Ceci suggère la présence de résonances internes multiples. Toutefois, nous observons que ce comportement est atténué pour une énergie initiale maximale ( $E_0 = 1$ ), où l'amortissement effectif est quasiment constant pour  $\Omega$  entre 1,5 et 3. De façon singulière, nous remarquons que l'amortissement effectif s'annule pour  $\Omega = 1$ , quel que soit le niveau d'énergie initiale. Ceci s'explique par le fait que pour une valeur du rapport des inerties  $\Gamma$  non nul, la valeur  $\Omega = 1$  représente une limite physique où la longueur des branches,  $\ell_2$ , comparée au tronc, tend vers 0.

Finalement, l'amortissement effectif augmente avec le rapport de masse  $\Gamma$  (figure 4.4d), mais de façon plus complexe que pour le modèle du chapitre 2 (figure 2.6d). Ce paramètre influence beaucoup la répartition des fréquences modales des modes propres autres que le mode des branches et le mode de tronc. Ceci doit être la raison pour laquelle nous observons un changement abrupte pour  $\Gamma \approx 0.3$ , pour des énergies faibles ( $E_0 = 0,01$ ) et moyennes ( $E_0 = 0,1$ ). En effet, un indice de la contribution des modes supérieurs au mécanisme d'amortissement par le branchement sera exposé à la section suivante. Ce comportement est atténué pour une énergie initiale maximale, où l'amortissement effectif décroît légèrement à partir de  $\Gamma \approx 0,2$ .

#### 4.1.4 Excitation par forçage

Dans le but de caractériser la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement vis-à-vis d'autres types d'excitation, nous étudions ici la réponse dynamique à un forçage du tronc, décrit à la section 4.1.2.

La figure 4.5 expose la réponse fréquentielle du système forcé normalisée par la réponse statique  $\lambda_{\text{stat}}$ , en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega_f$  et pour deux valeurs d'amplitude du forçage  $M_0$ .

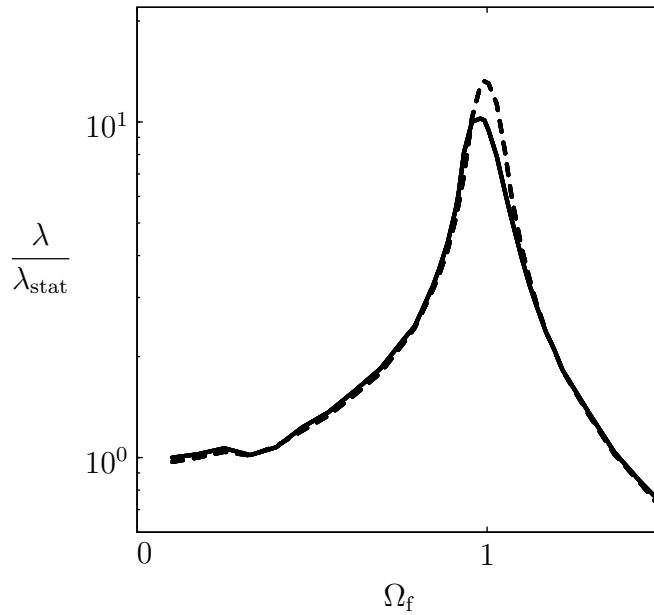


FIGURE 4.5 – Réponse fréquentielle du modèle branché continu à un forçage appliqué à la base du tronc, avec une fréquence relative  $\Omega_f$  (figure 4.2b). L'amplitude du tronc  $\lambda$  est normalisée par la réponse statique  $\lambda_{\text{stat}}$ , équation (4.4). Forçage de grande amplitude en trait continu (—) et de moyenne amplitude en trait discontinu (---). Les valeurs des paramètres sont celles de référence, équation (2.22).

Le pic de résonance pour  $\Omega_f = 1$  correspond à la résonance du mode de tronc. Nous observons sur la figure 4.5 que l'amplitude de ce pic est finie, attestant de la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement puisque le mode de tronc n'est pas amorti. Nous remarquons que l'amplitude du pic est légèrement plus élevée pour une amplitude de forçage moyenne en comparaison au cas d'un forçage de grande amplitude. Afin de comparer ces résultats à ceux obtenus précédemment par la méthode du lâcher, nous associons à l'amplitude statique  $\lambda_{\text{stat}}$ , donnée par  $M_0$ , un niveau d'énergie équivalent  $E_0$ .



Dans le cas du forçage d'amplitude moyenne, l'amplitude statique atteint  $\lambda_{\text{stat}} = 0,05 \ell_1$ . Elle atteint  $\lambda_{\text{stat}} = 0,1 \ell_1$  dans le cas d'un forçage d'amplitude élevée. Par conséquent, les amplitudes des pics de résonance de la figure 4.5 sont respectivement  $\lambda = 0,65 \ell_1$  et  $\lambda = \ell_1$ , ce qui équivaut respectivement à une énergie moyenne  $E_0 = 0,4$  et maximale de  $E_0 = 1$ . Ces valeurs sont rassemblées dans le tableau 4.2 :

$\lambda_{\text{stat}}/\ell_1$	$\lambda_{\text{réso}}/\ell_1$	$E_0$	$\xi_{\text{eff}}$
0,1	1	1	5%
0,05	0,65	0,4	4%

Tableau 4.2 – Amortissement effectif pour un forçage du tronc associé à une énergie équivalente pour les deux amplitudes de forçage.

De tels niveaux d'amortissement effectif, pour ces niveaux d'énergie, sont supérieurs aux valeurs trouvées dans le cas du lâcher (figure 4.3). Cette différence peut s'expliquer par le fait que contrairement au cas du forçage, le mode des branches n'a pas d'énergie initialement dans le cas de la méthode du lâcher. Ces résultats constituent un autre indice de la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement vis-à-vis d'autres types d'excitation et sa validité dans le cadre de structures continues.

### Contribution des modes supérieurs

Lorsque la fréquence du forçage augmente, d'autres modes sont excités. La figure 4.6 présente la réponse fréquentielle au forçage pour des fréquences d'excitation plus élevées.

Nous observons un second pic de résonance à une fréquence  $\Omega_f \approx 2$ . Ce pic ne correspond pas au mode des branches puisqu'il ne peut pas être directement excité par une force à la base du tronc (figure 4.1c). En fait, ce pic correspond à un autre mode qui peut être excité par une force sur le tronc et dont la fréquence propre est très proche de celle du mode des branches. Nous observons que ce mode est amorti, bien qu'il ne présente pas d'amortissement propre. Par conséquent, il semble que le mécanisme d'amortissement par le branchement, comme pour le mode de tronc, rentre également en jeu pour ce mode. Cependant, un autre phénomène peut expliquer, au moins en partie, l'amortissement apparent de ce mode. Nous remarquons sur la figure 4.6 que la fréquence de

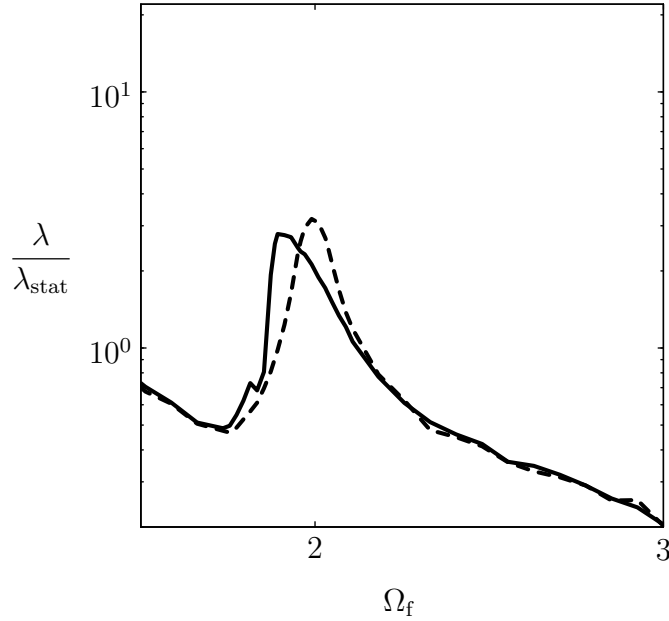


FIGURE 4.6 – Réponse fréquentielle du modèle branché continu. Extension de la figure 4.5 pour un rapport de fréquence entre 1,5 et 3.

résonance de ce mode diminue avec l'énergie. Ce phénomène non linéaire, appelé assouplissement, peut alors être la source d'une erreur d'estimation de l'amortissement réel du mode provenant du fait que le régime établi est atteint depuis une position au repos de la structure (Vakakis & Gendelman, 2009). Néanmoins, cette observation appuie les tentatives de description des comportements observés pour les dépendances aux paramètres géométriques aux figures 4.4a–d par la contribution d'autres modes.

En conclusion, il apparaît que les caractéristiques principales du mécanisme d'amortissement par le branchement sont toujours présentes dans une structure ayant une dynamique plus complexe et pour d'autres types d'excitation.

## 4.2 Expérience illustrative

Dans le but d'illustrer le mécanisme d'amortissement par le branchement sur une structure réelle, les résultats d'une expérience sur une structure flexible et branchée, similaire aux modèles précédents, sont présentés ici.

### 4.2.1 Description

La structure expérimentale, schématisée à la figure 4.7, est constituée de lamelles en PVC.

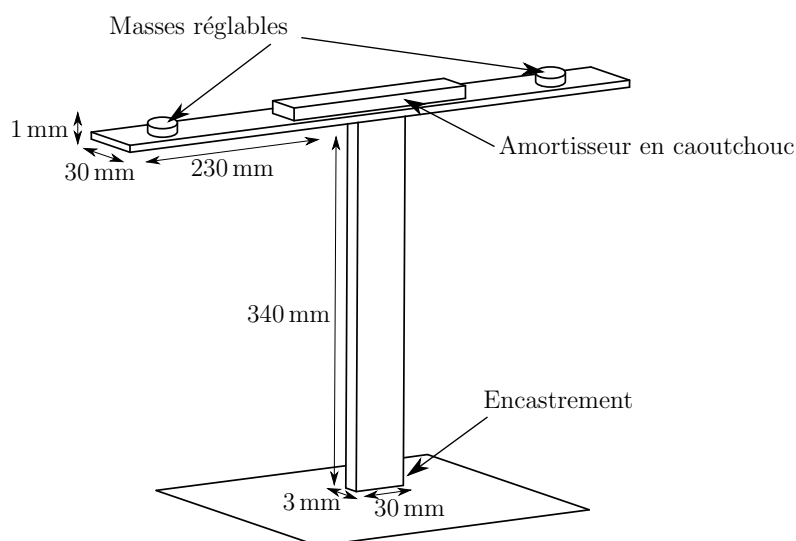


FIGURE 4.7 – Structure expérimentale constituée de deux lamelles de PVC collées en forme de 'T'. L'amortisseur en caoutchouc et les masses réglables permettent de régler le taux d'amortissement et la fréquence des branches.

La première lamelle, constituant le tronc, a une longueur de 340 mm, une section de 3 mm d'épaisseur sur 30 mm de largeur et est encastree à sa base par serrage dans un étau. La seconde lamelle, constituant les branches, d'une longueur totale de  $2 \times 230$  mm et d'une section de 1 mm d'épaisseur sur 30 mm de largeur, est disposée symétriquement et collée 'à plat' en haut du tronc. L'utilisation de lamelles permet de privilégier le mouvement de flexion du tronc dans la direction de son épaisseur. De même, les branches ont un mouvement privilégié dans la direction de leur épaisseur. La structure forme alors un 'T', analogue aux structures précédentes avec un angle de branchement  $\phi_b = \pi/2$ .

Les deux modes propres auxquels nous nous intéressons sont le mode de tronc et le mode des branches, exposés à la figure 4.8.

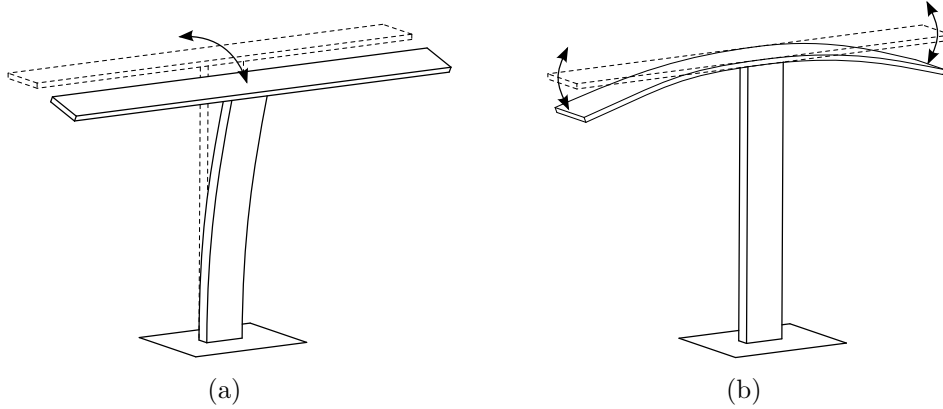


FIGURE 4.8 – Modes propres de la structure expérimentale. (a) Mode de tronc. (b) Mode des branches. Les autres modes propres ont des fréquences bien plus élevées du fait de la conception de la structure, permettant la visualisation aisée des transferts d'énergie entre les deux modes.

Cette disposition des branches, 'à l'équerre' du tronc, assure que les modes autres que le mode de tronc ou le mode des branches aient des fréquences bien supérieures et soient donc écartés de la dynamique de la structure dans cette expérience. Dans le but de conserver un rapport des fréquences propres, équation (4.1), proche de la valeur de référence  $\Omega = 2$ , deux petites masses réglables sont ajoutées sur les branches (figure 4.7). De même, afin d'apporter un niveau suffisant d'amortissement au mode des branches, un morceau de caoutchouc est collé au niveau du point de branchement, là où les changements de courbure des branches sont les plus importants (figure 4.7). Le réglage des masses et de la quantité de caoutchouc ont été fait par une mesure des oscillations libres des branches, le tronc étant bloqué, pour obtenir les valeurs souhaitées de  $\xi_b$  et  $\Omega$ . Enfin, d'après la définition du rapport des inerties  $\Gamma$ , équation (4.1), nous obtenons  $\Gamma = 0,22$  d'après la géométrie de la structure.

## 4.2.2 Procédure expérimentale

Dans le but de quantifier expérimentalement l'amortissement effectif dans cette structure, nous réalisons une procédure de lâcher sur le tronc analogue à celle utilisée pour le

modèle de la section précédente (figure 4.2a) Une photographie du montage expérimental est présentée à la figure 4.9.

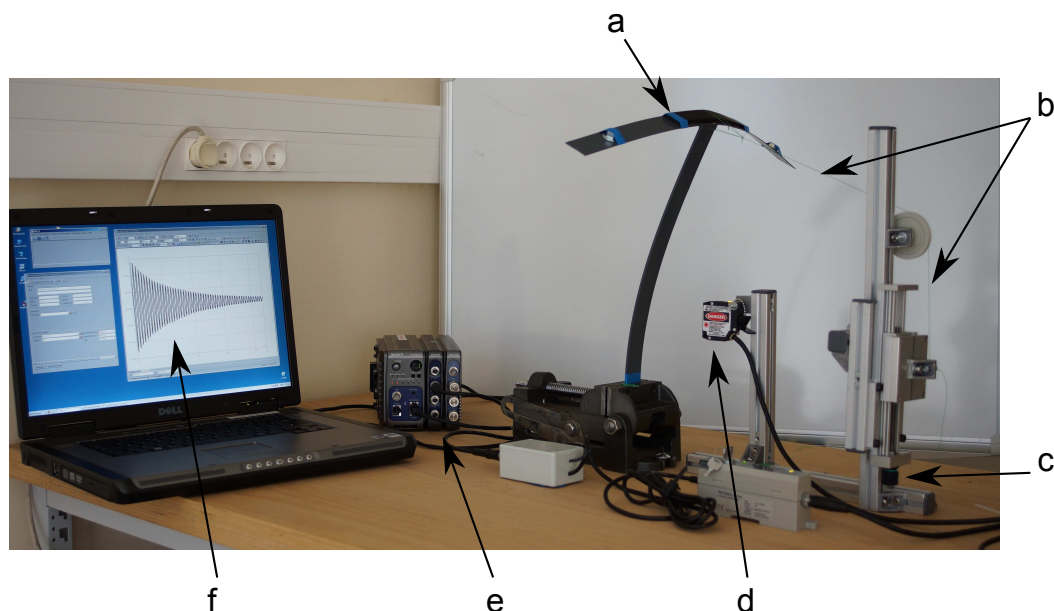


FIGURE 4.9 – Photographie du montage expérimental. (a) Structure expérimentale encastrée dans un étau. (b) Fil de nylon. (c) Molette de réglage de la tension du fil. (d) Capteur de déplacement. (e) Module d'acquisition. (f) Logiciel d'analyse.

La flexion précise du tronc et son maintien avant le lâcher sont assurés par un fil de nylon dont la longueur est réglée par une molette (figure 4.9). Le fil est rompu à l'aide d'une flamme pour obtenir un lâcher sans vitesse initiale. Les mesures des oscillations du tronc sont réalisées à une hauteur d'environ un quart de la hauteur du tronc, à l'aide d'un capteur de déplacement (Keyence LB-70W) par interférométrie laser. Le signal du capteur est converti par un module d'acquisition (Sony EX-IF10) puis analysé sur ordinateur par le logiciel PAK. L'oscillation libre du tronc est mesurée pendant une période. L'oscillation des branches est à l'inverse difficile à mesurer car leur mouvement est composé et plus complexe. Pour cette raison, contrairement aux modèles précédents, l'amortissement est défini par le seul intermédiaire de la mesure de la décroissance des oscillations du tronc. Bien que moins précise, cette méthode reste une bonne approximation de l'amortissement global de la structure. En effet, en nous basant sur l'analyse du modèle du chapitre 2 (figure 2.3), l'énergie reçue par les branches est faible en comparaison de l'énergie contenue dans le tronc.

Enfin, dans cette expérience, une partie non négligeable de l'amortissement mesuré directement via la décroissance de l'amplitude du tronc peut provenir de phénomènes tels que l'amortissement structural du PVC ou l'amortissement aérodynamique. Par conséquent, afin de distinguer la partie de l'amortissement provenant uniquement du mécanisme d'amortissement par le branchement, une méthode analogue à celle utilisée dans le cas du modèle en interaction avec un fluide sera utilisée (section 3.2.3 du chapitre 3). L'amortissement effectif est donc défini par la différence entre l'amortissement de la structure avec les branches oscillant librement et l'amortissement de la structure ayant les branches bloquées artificiellement, dans les mêmes conditions de lâcher. Le blocage des branches est effectué en les rigidifiant avec une baguette de masse faible et simplement maintenue avec de l'adhésif.

### 4.2.3 Résultats

Afin d'illustrer la méthode de comparaison pour la mesure du mécanisme d'amortissement par le branchement, la figure 4.10 présente les mesures des oscillations du tronc pour une amplitude de lâcher maximale pour le cas de la structure avec les branches libres en comparaison au cas avec les branches bloquées.

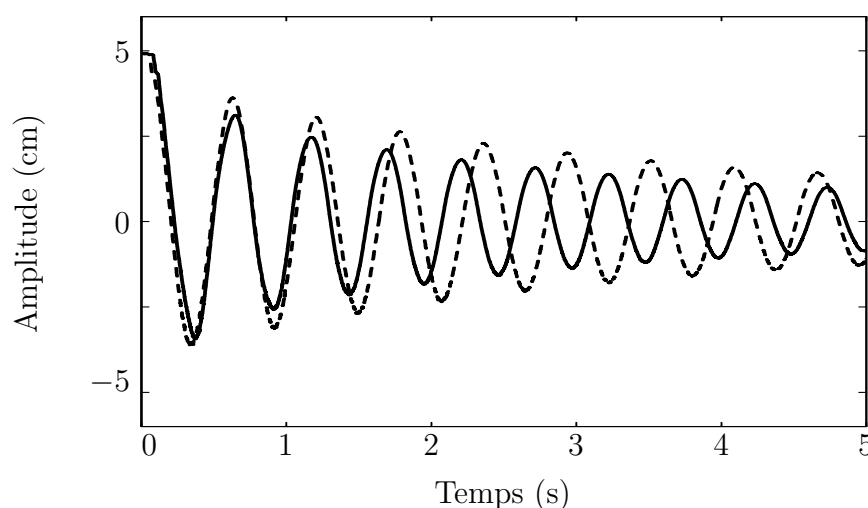


FIGURE 4.10 – Oscillation du tronc après un lâcher pour  $E_0 = 1$ . Cas avec les branches bloquée artificiellement en trait discontinu (---). Cas avec les branches oscillant librement en trait continu (—). L'amortissement effectif est défini comme la différence entre les amortissements des ces oscillations.

Nous observons que le cas où les branches oscillent librement est plus amorti que le cas où les branches sont bloquées. Pour quantifier le mécanisme d'amortissement par le branchement en fonction de l'énergie initiale  $E_0$ , celle-ci est estimée par le carré de l'amplitude initiale mesurée par le capteur. Elle est normalisée telle qu'elle vaille 1 pour un déplacement total du haut du tronc égale à la hauteur du tronc, de façon identique à la section précédente pour le cas du modèle excité par un lâcher. La figure 4.11 présente l'amortissement en fonction de l'énergie initiale pour les deux cas : branches libres et branches bloquées.

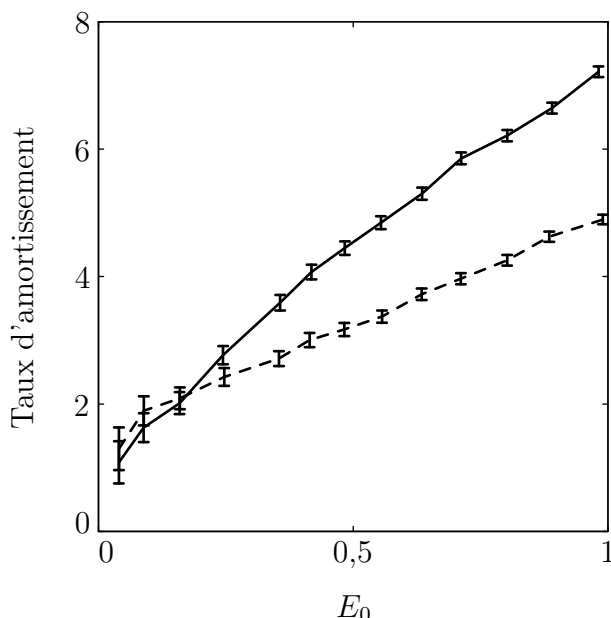


FIGURE 4.11 – Mesures expérimentales du taux d'amortissement total en fonction de l'énergie initiale pour le cas où les branches oscillent librement (—) et le cas où elles sont bloquées (---).

Un éventuel biais de mesure provenant de l'étalonnage du capteur n'a pas d'impact sur la valeur de l'amortissement puisque celle-ci est calculée à partir du rapport entre l'amplitude du lâcher initiale et l'amplitude de la première période (figure 4.10). Ainsi, l'incertitude de mesure est estimée d'après la précision du capteur.

Nous observons sur la figure 4.11 des évolutions du taux d'amortissement semblables à celles observées pour le modèle branché en interaction avec un fluide du chapitre précédent (figure 3.5). Pour une énergie initiale faible, l'amortissement est non nul car la structure possède un amortissement structurel provenant du matériau. Nous observons que

l'amortissement dépend grandement de l'énergie initiale du lâcher, même dans le cas où les branches sont bloquées. Cette évolution provient en partie de l'amortissement aérodynamique. Pour des niveaux de faibles énergie, les résultats sont identiques entre le cas où les branches sont libres et le cas où elles sont bloquées. À mesure que le niveau d'énergie augmente, nous observons une différence importante entre les deux cas. Cette différence atteste de la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement dans cette structure expérimentale. Pour une énergie maximale ( $E_0 = 1$ ), ce mécanisme représente plus de 30 % de l'amortissement total. Le mécanisme d'amortissement par le branchement permet donc d'ajouter une quantité importante d'amortissement à la structure. La figure 4.12 présente le taux d'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  supplémentaire apporté par ce mécanisme et défini par la différence des courbes de la figure 4.11.

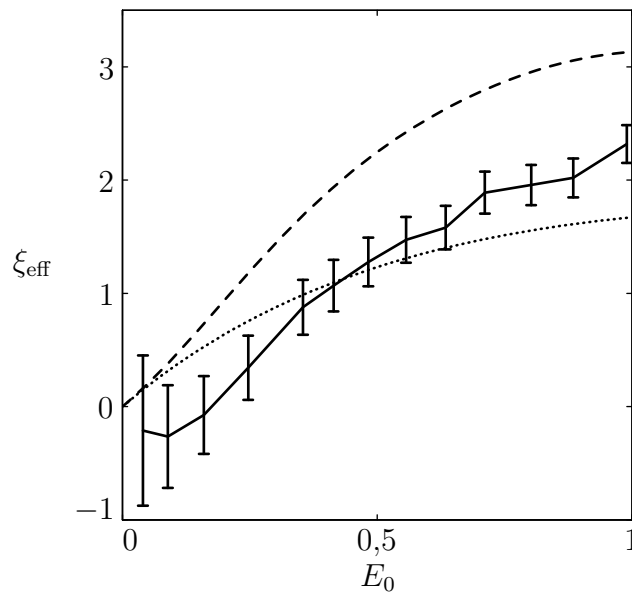


FIGURE 4.12 – Taux d'amortissement effectif de la structure expérimentale apporté par le branchement en fonction de l'énergie. Rappel du cas du modèle élémentaire du chapitre 2 (.....) et du cas du modèle continu de la section précédente (---).

Nous observons que l'amortissement effectif augmente avec l'énergie de façon analogue à l'amortissement effectif du modèle du chapitre 3 (figures 3.6). Le taux d'amortissement effectif atteint plus de 2 % pour une énergie maximale ( $E_0 = 1$ ). Une telle valeur d'amortissement, aux vues des valeurs des paramètres de cette structure, est semblable aux résultats obtenus pour les modèles précédents. Cette expérience prouve que le mécanisme



d'amortissement par le branchement, identifié et caractérisé sur les modèles précédents, peut être appliqué dans le cas de structures réelles.

### 4.3 Discussion

L'objectif de ce chapitre était de démontrer la validité du concept d'amortissement par le branchement dans le cas de structures continues.

Dans la première partie, par la méthode des éléments finis, nous avons étudié la dynamique d'un modèle branché constitué de poutres. Ce modèle présente un grand nombre de modes propres dont aucun n'est artificiellement bloqué, contrairement au modèle branché à deux degrés de liberté des chapitres 2 et 3, où un mouvement symétrique des branches était imposé. La présence du mécanisme d'amortissement par le branchement dans ce modèle a été démontrée de façon non ambiguë. Les caractéristiques du mécanisme sont très semblables à celles identifiées dans le modèle élémentaire du chapitre 2. Enfin, nous avons montré qu'une excitation par forçage donnait des résultats comparables, en termes d'amortissement effectif, à ceux obtenus par la condition de lâcher.

La seconde partie de ce chapitre portait sur l'illustration expérimentale du concept d'amortissement par le branchement. Une structure branchée a été conçue de telle manière que le mode de tronc et le mode des branches soient parfaitement localisés et réglés en fréquence. Puisque cette structure présente des conditions externes non maîtrisables, comme un amortissement aérodynamique, une méthode d'identification de l'amortissement effectif déjà utilisée au chapitre 3 (section 2) a été utilisée. Les mesures des taux d'amortissement ont montré la forte contribution (30 % supplémentaire) du mécanisme d'amortissement par le branchement à l'amortissement total de la structure. Ainsi, le taux d'amortissement effectif supplémentaire est de l'ordre de 2 % pour des vibrations de grande amplitude.

Bien que des phénomènes dynamiques plus complexes apparaissent dans les structures réelles (résonances multiples, amortissement structurel, amortissement aérodynamique, etc.), leur présence ne semblent pas troubler le mécanisme d'amortissement par le branchement. Ce résultat ouvre la voie à différents types d'application : c'est l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Applications

Dans la première partie de ce chapitre, une application possible du mécanisme d'amortissement par le branchement est présentée : un amortisseur branché de rotation basé sur le principe du TMD. Ce dispositif, dénommé TMBD pour 'Tuned-Mass-Branched-Damper' a pour but d'être spécifique à l'amortissement des vibrations de rotation de grande amplitude.

La seconde partie de ce chapitre porte sur les structures ramifiées. La première étape consiste à confronter les caractéristiques du mécanisme d'amortissement par le branchement aux caractéristiques dynamiques particulières des arbres afin d'apporter des arguments quant à la présence de ce mécanisme protecteur dans les arbres. Puisque ces structures naturelles présentent des géométries complexes et surtout très ramifiées, l'influence directe de la ramification sur le mécanisme d'amortissement par le branchement sera étudiée par la suite, à l'aide d'un modèle ramifié discret basé sur le modèle du chapitre 2. Enfin, les résultats précédents nous permettront de développer deux applications illustratives de structures continues ramifiées, basées sur le modèle du chapitre 4.

## 5.1 Amortisseur branché de rotation

L'idée d'application présentée ici repose sur deux constatations : l'une pour le TMD, l'autre pour le mécanisme d'amortissement par le branchement. Tout d'abord, les amortisseurs passifs de type TMD, dont une application a été présentée en introduction (figure 1.3), sont efficaces malgré leur rapport de masse faible mais restent non spécifiques aux vibrations de grande amplitude. Toutefois, ils sont fondés sur un principe de résonance et par conséquent, subissent des vibrations de grande amplitude. Par ailleurs, nous avons montré que le mécanisme d'amortissement effectif n'est efficace que pour des grandes amplitudes de mouvement. Nous proposons donc de coupler ces deux caractéristiques dans un modèle de 'Tuned-Mass-Branched-Damper' qui aurait pour but d'être spécifique à l'amortissement curatif des vibrations de rotation de grande amplitude.

### 5.1.1 Définition du modèle

Nous reprenons le modèle branché à deux degrés de liberté du chapitre 2 qui constitue le TMBD couplé à un modèle de structure en rotation d'inertie de rotation  $J_s$ , de raideur  $k_s$  et donc la rotation est paramétré par l'angle  $\psi$  (figure 5.1).

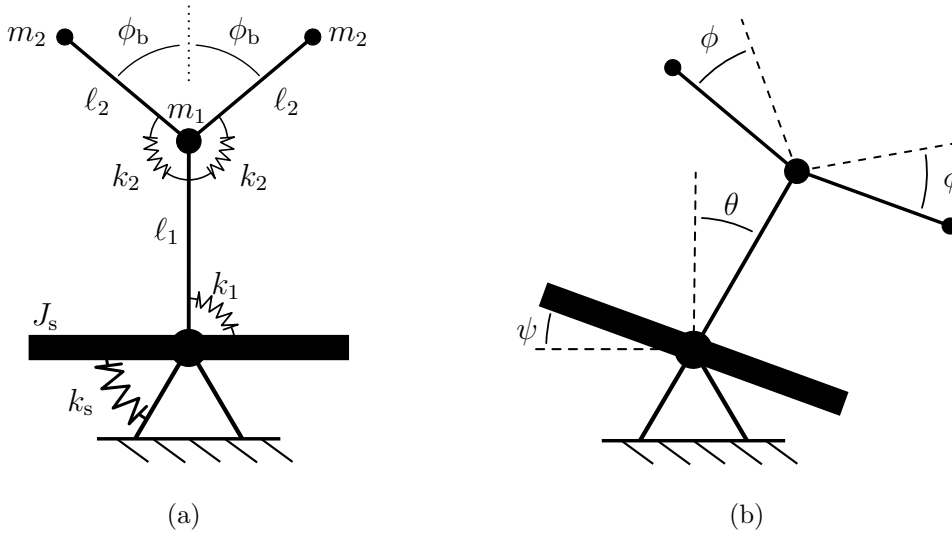


FIGURE 5.1 – Application du mécanisme d'amortissement par le branchement : le TMBD. (a) Géométrie au repos du dispositif TMBD couplé à une structure en rotation au repos. (b) Mouvement paramétré par l'angle de rotation du tronc  $\theta$ , l'angle des branches  $\phi$  et l'angle de la structure  $\psi$  à amortir.

Comme pour l'obtention du système d'équations du modèle du chapitre 2, nous exprimons respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par

$$E_c = \frac{1}{2} \left( (m_1 \ell_1^2 + 2m_2(\ell_1^2 + 2\ell_1 \ell_2 \cos(\phi_b + \phi) + \ell_2^2)) \dot{\theta}^2 + 2m_2 \ell_2^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} J_s \dot{\psi}^2, \quad (5.1)$$

et

$$E_p = \frac{1}{2} (k_s \psi^2 + k_1 (\psi - \theta)^2 + 2k_2 \phi^2). \quad (5.2)$$

Après utilisation des équations de Lagrange avec ces énergies, le système d'équations sur les degrés de liberté,  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  s'écrit

$$\begin{aligned} J_s \ddot{\psi} + k_s \psi &= k_1 (\theta - \psi), \\ J_\theta \ddot{\theta} + k_1 (\theta - \psi) &= 4m_2 \ell_1 \ell_2 \left( \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right), \\ 2m_2 \ell_2^2 \ddot{\phi} + 2k_2 \phi &= -2m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi), \end{aligned} \quad (5.3)$$

où l'inertie  $J_\theta$  est donnée par l'équation (2.4). Le système (5.3) est adimensionné avec les mêmes changements de variables qu'au chapitre 2, équation (2.6), avec en plus

$$\Psi(\tau) = \psi(t) \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}, \quad \Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_1} \quad \text{et} \quad J = \frac{J_\theta}{J_s}, \quad (5.4)$$

où  $\omega_s = \sqrt{k_s/J_s}$  est la pulsation propre de la structure principale;  $\Omega_s$  est le rapport de cette pulsation sur celle du TMBD; et  $J$  est le rapport de l'inertie du TMBD sur celle de la structure principale. C'est ce paramètre qui est couramment nommé rapport de masse et qui est de l'ordre de quelques pour-cents dans la plupart des applications d'ingénierie des TMDs. Afin de mettre en avant le fait que ce dispositif est un amortisseur visant à dissiper l'énergie d'une structure déjà existante, nous conservons une telle valeur pour ce paramètre. Avec ce changement de variables adimensionnelles, le système d'équations (5.3) devient

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} + (\Omega_s^2 + J) \Psi &= J \Theta, \\ \ddot{\Theta} + \Theta &= \Psi + 2\Gamma \left( \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta} (\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right), \\ \ddot{\Phi} + \Omega^2 \Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nous observons dans le système (5.5) que les équations pour  $\Theta$  et  $\Psi$  sont linéairement couplées. Nous pourrions diagonaliser ce système par un changement de variables pour obtenir un nouveau système sans couplages linéaires. Cependant, dans le but de réaliser une étude facilement comparable à celles précédentes, nous conservons cette forme explicite avec les degrés de liberté initiaux. Le terme de 'mode de tronc' n'a donc pas de sens et ne sera pas utilisé dans ce chapitre. Toutefois, ce système est déjà partiellement diagonalisé puisque l'angle des branches  $\Phi$  ne possède pas de couplage linéaire avec les autres degrés de liberté. On conserve alors l'appellation de 'mode des branches'.

### 5.1.2 Critères de comparaison au TMD

Le TMBD étant inspirée du TMD, nous allons comparer leurs performances respectives. Les performances d'un TMD sont classiquement caractérisées par la réponse forcée de la structure principale, dont un exemple a été présenté à la figure 1.3 en introduction de cette thèse. Les performances du TMBD seront caractérisées de la même manière. Dans ce but, la structure principale est forcée par un moment d'amplitude  $m_0$  et de pulsation  $\omega_f$ . Les deux variables adimensionnelles correspondantes sont respectivement

$$M_0 = \frac{m_0}{k_s} \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \quad \text{et} \quad \Omega_f = \frac{\omega_f}{\omega_s}. \quad (5.6)$$

L'amplitude d'oscillation en régime établi de la structure principale sera notée  $\bar{\Psi}$ . C'est cette amplitude qui détermine les performances de chaque amortisseur.

Afin de comparer deux systèmes équivalents par ailleurs, nous choisissons deux critères de comparaison entre le TMD et le TMBD.

Le premier critère est que les deux systèmes aient le même rapport d'inertie et le même rapport de fréquence. Dans ce but, le TMD de référence ne sera autre que l'amortisseur branché lui-même avec les branches bloquées artificiellement, c.-à-d.  $\Phi = 0$  dans le système (5.5). Nous choisissons pour le rapport d'inertie la valeur  $J = 0.01$ , soit 1% de l'inertie de la structure principale, et  $\Omega_s = 1$  pour le rapport de fréquence. Ces valeurs sont classiques pour un TMD, comme expliqué en introduction et dans la section précédente.

Le second critère est que les deux systèmes utilisent la même quantité de matière dissipative. Dans ce but, nous partons de la quantité de matière dissipative utilisée pour le

TMD. Cette quantité équivaut à un taux d'amortissement noté  $\xi_{\text{TMD}}$  qui est un paramètre d'optimisation important pour un TMD. Une optimisation robuste et classique du TMD consiste à minimiser l'amplitude de la structure principale  $\bar{\Psi}$  pour toutes fréquences de forçage  $\Omega_f$  (Den Hartog, 2007). Pour les valeurs de  $J$  et  $\Omega_s$  choisies précédemment, cette optimisation donne la valeur  $\xi_{\text{TMD}} = 6\%$  que nous choisissons pour le TMD de référence. Par conséquent, le système d'équations régissant le TMD de référence est

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} + 2J\xi_{\text{TMD}}\dot{\Psi} + (\Omega_s^2 + J)\Psi &= J(\Theta + 2\xi_{\text{TMD}}\dot{\Theta}) + JM_0 \cos(\Omega_s\Omega_f\tau), \\ \ddot{\Theta} + 2\xi_{\text{TMD}}\dot{\Theta} + \Theta &= \Psi + 2\xi_{\text{TMD}}\dot{\Psi}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Notons que  $\xi_{\text{TMD}}$  intervient dans les deux équations du système (5.7) car la dissipation intervient sur le mouvement relatif  $(\Theta - \Psi)$ . Les équations régissant le TMBD sont

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} + 2J\xi_t\dot{\Psi} + (\Omega_s^2 + J)\Psi &= J(\Theta + 2\xi_t\dot{\Theta}) + JM_0 \cos(\Omega_s\Omega_f\tau), \\ \ddot{\Theta} + 2\xi_t\dot{\Theta} + \Theta &= \Psi + 2\xi_t\dot{\Psi} + 2\Gamma \left( \dot{\Theta}\dot{\Phi} \sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta}(\cos(\phi_b + \Phi) - \cos \phi_b) \right), \\ \ddot{\Phi} + 2\Omega\xi_b\dot{\Phi} + \Omega^2\Phi &= -\dot{\Theta}^2 \sin(\phi_b + \Phi), \end{aligned} \quad (5.8)$$

où l'amortissement du TMBD est répartie entre le tronc avec  $\xi_t$  et les branches avec  $\xi_b$ . Ainsi, le second critère sur la même quantité de matière dissipative pour les deux systèmes s'exprime par

$$\xi_t + \Omega\Gamma\xi_b = \xi_{\text{TMD}} \quad (5.9)$$

Les valeurs des paramètres du branchement pour le TMBD sont celles utilisées aux chapitres 2 et 3 avec  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\Omega = 2$  et  $\Gamma = 0,2$ . Enfin, nous choisissons arbitrairement une répartition égale de l'amortissement entre le tronc et les branches. Par conséquent, d'après l'équation (5.9) et la valeur de  $\xi_{\text{TMD}}$ , nous obtenons  $\xi_t = 0,03$  et  $\xi_b = 0,05$ .

Les performances des deux systèmes en termes d'amortissement de la structure principale peuvent donc être comparées, en fonction de niveau  $M_0$  et la fréquence  $\Omega_f$  du forçage.

### 5.1.3 Résultats

Comme dans les études des chapitres 2 et 3, les systèmes d'équations (5.7) du TMD et (5.8) du TMBD sont résolus numériquement. Le régime établi est atteint à partir d'une

condition initiale au repos, après un nombre suffisant de périodes d'oscillation.

La figure 5.2 montre l'amplitude de la structure forcée en régime établi  $\bar{\Psi}$ , normalisée par la déformée statique  $\Psi_{\text{statique}} = M_0 J / \Omega_s^2$ , pour une amplitude de forçage avec  $M_0 = 0.5$ .

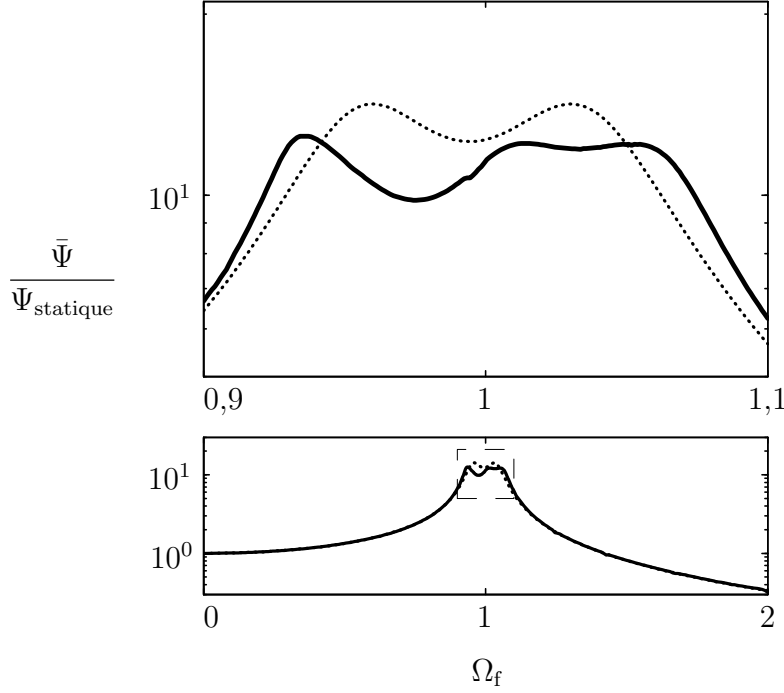


FIGURE 5.2 – Amplitude de la structure forcée en régime établi  $\bar{\Psi}$ , normalisée par la déformée statique  $\Psi_{\text{statique}}$  en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega_f$  et pour une amplitude de forçage moyenne  $M_0 = 0,5$ . Cas du TMD en trait pointillé ( $\cdots$ ). Cas du TMBD en trait continu ( $—$ ). Les deux systèmes ont les mêmes rapports d'inertie et de fréquence, et utilisent la même quantité de matière dissipative. Les valeurs des paramètres du branchement du TMBD sont celles de référence avec  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\Omega = 2$ ,  $\Gamma = 0,2$ .

L'amortissement apporté par le TMD est indépendant de l'amplitude de forçage  $M_0$  puisque le système est linéaire. La courbe en pointillé de la figure 5.2 est la même que celle exposée à la figure 1.3 en introduction de cette thèse. Nous observons sur cette courbe que l'amplitude maximale de la structure possédant un TMD, atteinte pour deux valeurs des fréquences du forçage autour de  $\Omega_f = 1$ , est environ 13 fois supérieure à la déformée statique. C'est cette amplitude maximale qui détermine l'indice de performance du TMD. Nous observons sur la figure 5.2 que le TMBD donne de meilleurs résultats puisque l'amplitude maximale n'est que d'environ 11 fois supérieure à la déformée statique. Toutefois,

ce résultat dépend de l'amplitude de forçage  $M_0$  puisque le TMBD est un système non linéaire.

Afin d'observer l'influence du niveau de forçage sur l'indice de performance du TMBD, la figure 5.3 présente la généralisation de la courbe précédente comme une carte donnant l'amplitude  $\bar{\Psi}$  normalisée par l'indice de performance du TMD en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega_f$  et de l'amplitude de forçage  $M_0$ .

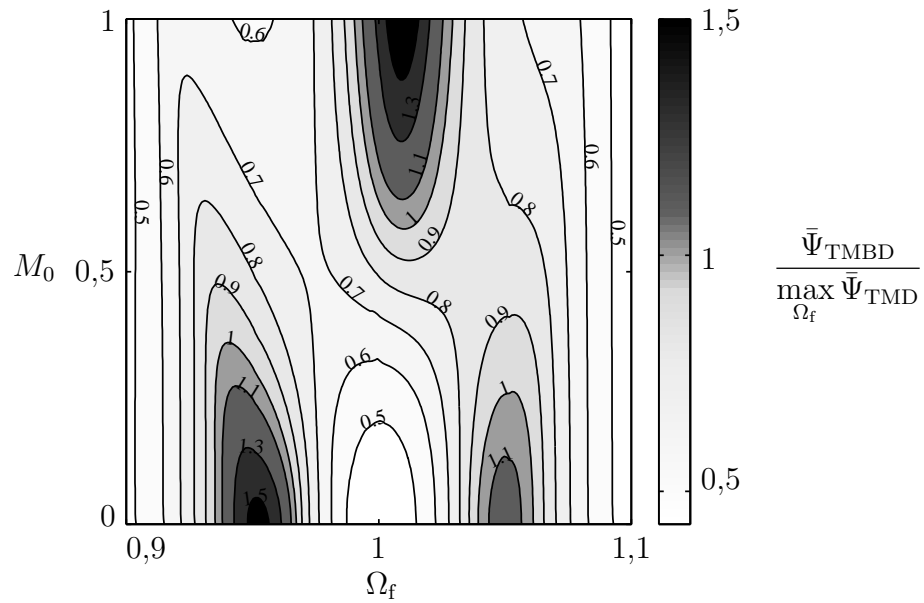


FIGURE 5.3 – Carte de l'amplitude de la structure forcée possédant un TMBD, normalisée par l'indice de performance du TMD, en fonction de la fréquence de forçage  $\Omega_f$  et de l'amplitude de forçage  $M_0$ . Les réglages des deux systèmes TMD et TMBD sont les mêmes que ceux de la figure 5.2.

Nous observons que le comportement du TMBD dépend fortement de l'amplitude du forçage  $M_0$ . Pour  $M_0$  proche de 0, le comportement est identique à celui d'un TMD linéaire car le mouvement du mode des branches devient nul à ces niveaux d'énergie. Par conséquent, l'indice de performances du TMBD est plus faible que pour le TMD puisque l'amortissement qui rentre en jeu dans ce cas est seulement  $\xi_t = 3\%$ , loin de la valeur optimale que le TMD possède  $\xi_{TMD} = 6\%$ .

Pour un forçage de grande amplitude, avec  $M_0$  proche de 1, nous observons que le TMBD montre un unique pic de résonance à  $\Omega_f = 1$ , toujours avec un indice de performance moindre que celui du TMD. Ce comportement est similaire à celui d'un TMD



qui présenterait un amortissement trop élevé (Den Hartog, 2007). Il provient du fait que le taux d'amortissement effectif du TMBD devient trop fort pour de telles amplitudes.

Pour une gamme moyenne d'amplitude de forçage, autour de  $M_0 = 0,5$ , nous observons que le TMBD présente de meilleures performances que le TMD. Dans le but d'observer clairement la zone de meilleur performance du TMBD, la figure 5.4 compare, à la performance du TMD, la performance du TMBD (le maximum de  $\bar{\Psi}_{\text{TMBD}}$  pour  $M_0$  fixé), en fonction de l'amplitude du forçage  $M_0$ .

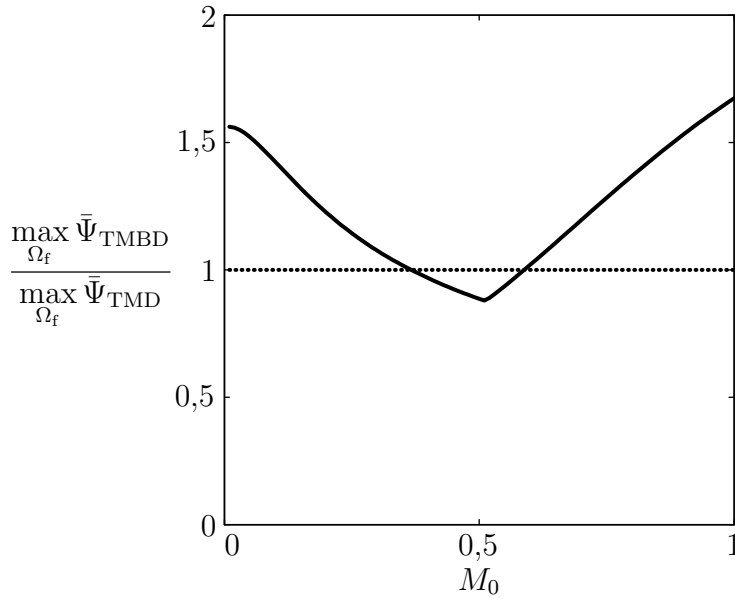


FIGURE 5.4 – Performance du TMBD en trait continu (—) normalisée par celle du TMD, en fonction de l'amplitude de forçage  $M_0$ . Les réglages des deux systèmes sont les mêmes que ceux de la figure 5.2.

Nous observons que le TMBD présente de meilleures performances que le TMD pour une gamme d'amplitude de forçage entre  $M_0 = 0,4$  et  $M_0 = 0,6$ . Pour une amplitude de forçage proche de  $M_0 = 0,5$  la performance du TMBD est maximale et est environ 12 % meilleure à celle du TMD. En dehors de cette gamme, la performance du TMBD est inférieure à plus de 50 % à celle du TMD.

Quelques remarques doivent être faites sur ce résultat. Premièrement, la notion d'amplitude moyenne ( $M_0 = 0,5$ ) correspond ici à une amplitude de rotation de l'ordre de  $30^\circ$  pour la structure principale. La notion d'amplitude moyenne est donc relative à la structure considérée. Deuxièmement, les réglages du présent TMBD sont basés sur les

valeurs des paramètres de référence utilisées au chapitre 2. Dans ce cadre, le réglage de la répartition de la matière dissipative entre le tronc et les branches s'est fait de façon arbitraire. De même que la performance d'un TMD est sensible à ses réglages, celle du TMBD l'est aussi. Ainsi, il y a de fortes chances qu'il existe un réglage du TMBD plus favorable. Toutefois, contrairement au TMD, il est difficile de prédire analytiquement les valeurs optimales des paramètres du TMBD en tant que système non linéaire.

## 5.2 Les arbres

Nous avons montré, dans les chapitres précédents, que le mécanisme d'amortissement par le branchement, inspiré par la dynamique des arbres, est robuste et spécifique à l'amortissement des vibrations de grande amplitude et qu'il est basé sur un ingrédient fondamental : le branchement. Sauf par des intuitions présentées en introduction de cette thèse, rien n'indique clairement que ce mécanisme d'amortissement par le branchement est effectivement présent dans les arbres.

La compatibilité du mécanisme d'amortissement par le branchement avec l'architecture ramifiée des arbres repose un premier ingrédient nécessaire : la présence de modes des branches. La ramification d'un arbre apporte un grand nombre de modes des branches localisés dans l'architecture, schématisé par la figure 5.5 tirée de (Rodriguez *et al.*, 2008).

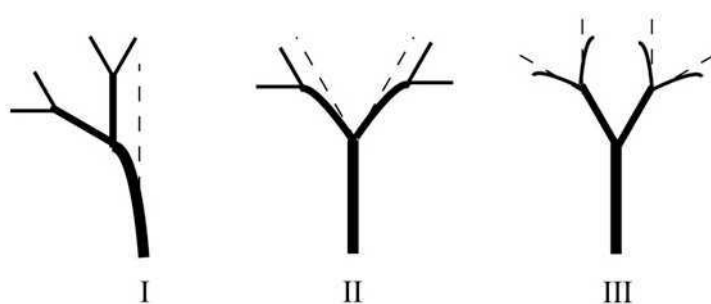


FIGURE 5.5 – Schématisation des localisations modales dans les arbres par Rodriguez *et al.* (2008). (I) Mode de tronc. (II) premier mode des branches. (III) second mode des branches.

Comme l'indiquent Rodriguez *et al.*, ces modes propres localisés dans les branches im-

pliquent aussi légèrement la déformation du tronc et des branches des niveaux inférieurs, du fait d'une architecture qui n'est pas parfaitement symétrique. Toutefois, ceci n'est pas incompatible avec la présence de transferts d'énergie non linéaires entre modes propres puisque des forces gyroscopiques exercées par le mouvement du mode de tronc existent toujours. Bien que pour de telles structures ramifiées, des modes intermédiaires existent, comme ceux observé à la figure 1.7, les résultats du chapitre 4, sur la contribution des modes supérieurs, suggèrent la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement pour ces modes plus complexes. On peut déduire de cette analyse que la ramification et la complexité de l'architecture des arbres ne sont pas des facteurs limitant le mécanisme d'amortissement par le branchement entre le mode de tronc et ces modes des branches.

Le second critère important de la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement dans les arbres porte sur les fréquences de ces modes des branches relativement à celle du mode de tronc. En effet, nous avons montré que ce mécanisme est basé sur une résonance interne 1:2 entre le mode de tronc et un mode des branches. À l'exception des résultats de Rodriguez *et al.* (2008) (figure 1.7) révélant une forte densité modale sur les architectures de deux arbres, les études donnant la répartition fréquentielle dans les arbres sont rares et se limitent, dans le meilleur des cas, à la seconde fréquence propre. Toutefois, la formulation développée par Rodriguez *et al.* (2008) permet de s'affranchir de mesures directes car elle fournit une approximation de la répartition des fréquences propres de l'arbre à partir de sa géométrie. En effet, il a été montré que l'architecture de l'arbre suit des lois statistiques d'un niveau de branchage au suivant (McMahon & Kronauer, 1976). Autrement dit, la géométrie complexe d'un arbre peut être résumée par deux paramètres statistiques :  $\delta$  le rapport des diamètres entre branche fille et branche mère et  $\gamma$  le rapport des longueurs. Par chance, ces données architecturales sont beaucoup plus abondantes dans la littérature. Par des considérations de loi d'échelle, la formulation de Rodriguez *et al.* (2008) consiste à montrer que la loi d'évolution des fréquences propres d'un arbre quelconque, dont la géométrie est paramétrée par  $\delta$  et  $\gamma$ , s'écrit de manière approchée par

$$\Omega_n = \left( \frac{\delta}{\gamma^2} \right)^n, \quad (5.10)$$

où  $\Omega_n$  est le rapport de la fréquence du mode des branches de niveau  $n$  sur celle du mode de tronc. Dans la littérature sur les arbres, les paramètres standards sont  $\lambda$  et  $\beta$ , appelés

paramètres allométriques, liés aux rapports des longueurs et des diamètres par

$$\delta = \lambda^{1/2} \quad \text{et} \quad \gamma = \lambda^{\frac{1}{2\beta}}. \quad (5.11)$$

Le tableau 5.1 confronte les données recueillies dans la littérature mesurées sur plusieurs types d'arbres, avec la formulation précédente (5.10), donnant l'évolution des rapports des fréquences propres de l'arbre.

Arbres	Coefficients allométriques		Rapports équivalents		Fréquences extrapolées			
	$\beta$	$\lambda$	$\delta$	$\gamma$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
Noyer commun <i>Juglans regia</i>	1,37	0,25	0,50	0,60	<b>1,38</b>	3,78	10,40	28,63
Chêne rouge d'Amérique <i>Quercus rubra</i>	1,51	0,41	0,64	0,74	<b>1,16</b>	<b>2,08</b>	3,76	6,79
Chêne blanc d'Amérique <i>Quercus alba</i>	1,41	0,28	0,53	0,64	<b>1,30</b>	3,22	7,94	19,58
Chêne blanc d'Amérique <i>Quercus alba</i>	1,66	0,29	0,54	0,69	<b>1,13</b>	<b>2,39</b>	5,04	10,63
Peuplier faux-tremble <i>Populus tremuloides</i>	1,5	0,29	0,54	0,66	<b>1,23</b>	<b>2,80</b>	6,40	14,61
Cerisier de Pennsylvanie <i>Prunus pensylvanica</i>	1,5	0,24	0,49	0,62	<b>1,27</b>	3,28	8,50	22,02
Pin blanc d'Amérique <i>Pinus strobus</i>	1,37	0,24	0,49	0,59	<b>1,39</b>	3,93	11,15	31,60

Tableau 5.1 – Données extraites de la littérature (Lopez *et al.*, 2011) sur les paramètres allométriques  $\beta$  et  $\lambda$  des arbres confrontées à la loi d'échelle de Rodriguez *et al.* (2008), équation (5.10), extrapolant les rapports des fréquences  $\Omega_n$  des modes de branche, pour des niveaux  $n = 1$  à 4 dans l'arbre. Les rapports des diamètres  $\delta$  et des longueurs  $\gamma$  sont équivalents aux paramètres allométriques, équation (5.11). En gras, les rapports des fréquences se trouvant dans l'intervalle  $1 \leq \Omega \leq 3$  propice au mécanisme d'amortissement par le branchement.

Nous observons que pour tous les arbres répertoriés, les deux premiers modes de

branches, des niveaux 1 et 2, ont des rapports des fréquences compris entre 1 à 4. Nous avons montré dans les chapitres précédents que le mécanisme d'amortissement par le branchement s'accommode très bien d'un rapport des fréquences de valeur comprise entre 1 et 3. De telles valeurs sont donc compatibles avec le mécanisme d'amortissement par le branchement. Pour les modes des branches des niveaux supérieurs, à partir du niveau 3, les rapports des fréquences sont vraiment trop grands pour permettre l'expression du mécanisme.

Ces données mesurées sur de vrais arbres sont tout à fait compatibles avec le mécanisme d'amortissement par le branchement pour les premiers modes des branches. Ainsi, par ses réglages fréquentiels, l'arbre disposerait d'un mécanisme d'amortissement supplémentaire et spécifique aux vibrations de grande amplitude subis lors de chargements extrêmes. Ce mécanisme protecteur est clairement complémentaire au mécanisme linéaire décrit par James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007), résumé en introduction de cette thèse (figure 1.6).

Cette analyse qualitative montre que plusieurs modes des branches peuvent intervenir dans le mécanisme d'amortissement par le branchement dans les arbres. Il reste à savoir si cette dynamique multimodale est quantitativement bénéfique au mécanisme d'amortissement par le branchement, en comparaison d'une dynamique avec un seul mode des branches.

Nous avons montré au chapitre 3 que la présence d'un fluide environnant ne modifiait pas les caractéristiques principales du mécanisme d'amortissement par le branchement. L'interaction des arbres avec l'air peut alors servir de source dissipative pour le mécanisme d'amortissement par le branchement. L'amortissement aérodynamique du mode de tronc des arbres est de l'ordre de 10% à 20% (Sellier *et al.*, 2006; Moore & Maguire, 2005; Castro-García *et al.*, 2008; Jonsson *et al.*, 2007). Il doit en être de même pour les modes des branches, soit typiquement l'ordre de grandeur optimal du taux d'amortissement des branches pour le mécanisme d'amortissement par le branchement.

### 5.3 Modèle ramifié discret

Les arbres possèdent des mécanismes spécifiques pour adapter leur croissance en répartissant au mieux leur matière organique qui est en quantité finie. La thigmomorphogénèse présentée en introduction de cette thèse en est un exemple. La répartition de cette masse par le nombre de ramifications influence certainement les performances du mécanisme d'amortissement par le branchement, que ce soit pour l'arbre ou pour l'ingénierie bio-inspirée. Nous proposons d'explorer l'influence de la ramification en quantifiant le mécanisme d'amortissement par le branchement sur un modèle ramifié ayant la même masse des branches que le modèle simplement branché du chapitre 2.

#### 5.3.1 Définition du modèle

Le modèle ramifié est formé de manière fractale sur les bases du modèle élémentaire du chapitre 2, représenté à la figure 5.6a.

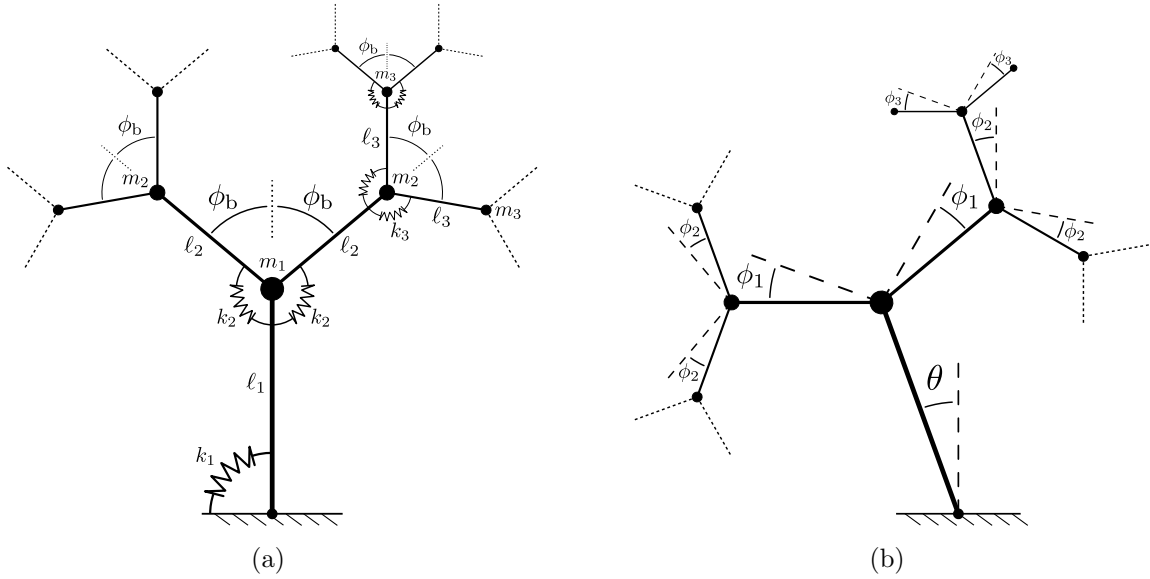


FIGURE 5.6 – Modèle ramifié. (a) Géométrie au repos. (b) Cinématique paramétrée par l'angle du tronc  $\theta$  et par les angles de chaque niveau de branchage  $\phi_n$ .

Chaque niveau  $n$  de branche est paramétré par la longueur de branche, notée  $\ell_n$ , d'une masse  $m_n$  et reliée à la branche mère par une raideur de rotation  $k_n$ . Le paramètre  $N$  représente le nombre de niveaux de branchage dans le modèle tel que  $n$  varie de 1 à  $N$ .

L'assemblage fractal impose que l'angle de branchement  $\phi_b$ , et les rapports de masse, de longueur et de raideur soient constants dans l'architecture entre branche mère et branche fille. Ces rapports sont donnés respectivement par

$$\mu_N = \frac{m_{n+1}}{m_n} \quad , \quad \gamma_N = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \quad \text{et} \quad \kappa_N = \frac{k_{n+1}}{k_n} \quad \forall n. \quad (5.12)$$

Puisque nous souhaitons connaître l'influence du branchement sous la condition d'un critère de masse constante qui sera détaillé dans la section suivante, ces rapports dépendront du nombre  $N$  de ramifications.

De façon analogue à la cinématique du modèle du chapitre 2, dans la cinématique du modèle ramifié, seuls des mouvements symétriques à chaque niveau de branchage sont autorisés. Le mouvement des branches de niveau  $n$  est alors paramétré par un unique degré de liberté  $\phi_n$  (figure 5.6b). Le modèle présente ainsi  $N + 1$  degrés de liberté, le premier correspond au mode de tronc, et les suivants à chaque mode des branches. Le même taux d'amortissement  $\xi_b$  est introduit sur chaque mode des branches. Le système d'équations adimensionnelles, dont le calcul est détaillé en annexe C, s'exprime par

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \Theta &= -\Lambda_0 \ddot{\Theta} + \dot{\Theta} \sum_{p=1}^N \Gamma_p H_{0,p} \dot{\Phi}_p \\ \ddot{\Phi}_n + 2\Omega_n \xi_b \dot{\Phi}_n + \Omega_n^2 \Phi_n &= -\Lambda_n \ddot{\Phi}_n + \dot{\Phi}_n \sum_{p=n+1}^N \Gamma_p H_{n,p} \dot{\Phi}_p + C_{n,1} \dot{\Theta}^2 + \sum_{p=2}^n C_{n,p} \dot{\Phi}_p^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

où  $\Omega_n$  est le rapport de la fréquence du mode des branches de niveau  $n$  sur celle du mode de tronc ;  $\Gamma_x$  est le rapport de l'inertie de rotation du mode des branches de niveau  $x$  sur celle du mode de tronc, le tout divisé par le rapport des longueurs  $\gamma$  ; enfin,  $\Lambda_n$ ,  $C_{n,x}$  et  $H_{n,x}$  sont des coefficients dépendant de la géométrie dont les expressions sont détaillées en annexe C. Notons qu'en prenant un nombre de ramifications  $N = 1$  dans le système d'équations (5.13), on retrouve bien le système d'équations du modèle élémentaire du chapitre 2, équation (2.8).

Nous observons dans le système d'équations (5.13) que les couplages non linéaires entre modes se font de façon ordonnée. Un mode de niveau  $n$  reçoit de l'énergie des modes des niveaux inférieurs par des termes en ' $\dot{\Theta}_n^2$ ', et reçoit de l'énergie des modes des niveaux supérieurs par termes en ' $\dot{\Theta}_n \dot{\Theta}_x$ ', avec  $x > n$ . L'origine physique de ces transferts

est la même que dans cas du modèle simplement branché du chapitre 2. Pour visualiser plus facilement cet ordonnancement des transferts d'énergie entre modes, étudions le cas particulier à  $N = 2$  niveaux de ramification. Dans ce cas, le système d'équations (5.13) est

$$\begin{aligned}\ddot{\Theta} + \Theta &= -\Lambda_0 \ddot{\Theta} + \dot{\Theta} \left( \Gamma_1 H_{0,1} \dot{\Phi}_1 + \Gamma_2 H_{0,2} \dot{\Phi}_2 \right) \\ \ddot{\Phi}_1 + 2\Omega_1 \xi_b \dot{\Phi}_1 + \Omega_1^2 \Phi_1 &= -\Lambda_1 \ddot{\Phi}_1 + \Gamma_2 H_{1,2} \dot{\Phi}_1 \dot{\Phi}_2 + C_{1,1} \dot{\Theta}^2, \\ \ddot{\Phi}_2 + 2\Omega_2 \xi_b \dot{\Phi}_2 + \Omega_2^2 \Phi_2 &= -\Lambda_2 \ddot{\Phi}_2 + C_{2,1} \dot{\Theta}^2 + C_{2,2} \dot{\Phi}_1^2.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Les couplages non linéaires entre modes sont résumés par la figure 5.7.

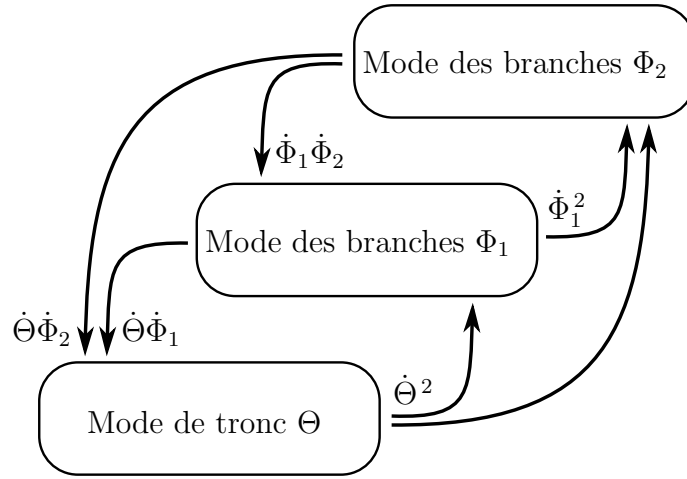


FIGURE 5.7 – Schéma des couplages non linéaires entre les modes propres dans le cas de deux niveaux de ramification ( $N = 2$ ). Les flèches représentent les transferts non linéaires d'énergie entre modes propres.

Nous observons que l'énergie du mode de tronc peut être transférée de manière directe dans chaque mode des branches du modèle par des termes de type  $\dot{\Theta}^2$ . De même, l'énergie d'un mode des branches de niveau  $n$  peut être transférée aux modes suivants par des termes du type  $\dot{\Phi}_n^2$ . L'énergie d'un mode de niveau  $n$  peut aussi redescendre vers les modes inférieurs par des termes du type  $\dot{\Phi}_n \dot{\Phi}_{x < n}$ .

Ce diagramme se généralise pour un nombre arbitraire de niveaux de ramifications  $N$  comme le montrent les équations (5.13). Ainsi, avec une condition initiale sur le tronc, une partie de l'énergie initiale sera transférée directement vers chaque mode des branches, ce qui devrait offrir un mécanisme d'amortissement par le branchement plus important que dans le cas d'un seul niveau de ramification.



### 5.3.2 Critères de ramification

L'amortissement effectif de ce modèle ramifié est identifié par une méthode identique à celle déjà utilisée pour le modèle du chapitre 2 : une condition initiale sur le mode de tronc uniquement, équation (2.11), et un amortissement défini par la décroissance de l'énergie totale du système après une période du mode de tronc, équation (2.14).

Puisque nous souhaitons quantifier l'influence du nombre de ramifications  $N$  sur le mécanisme d'amortissement par le branchement, nous choisissons de comparer le système ramifié, équation (5.13), ayant une masse du branchage égale au modèle simplement branché du chapitre 2. De plus, nous conservons le même rapport  $\Gamma_1$  de l'inertie de rotation du premier mode des branches sur celle du mode de tronc, quel que soit le nombre de ramifications. De même, le rapport  $\Omega_1$  de la fréquence du premier mode des branches sur celle du mode de tronc est conservé. Ces trois contraintes sont schématisées par la figure 5.8 dans le cas à deux niveaux de ramifications ( $N = 2$ ).

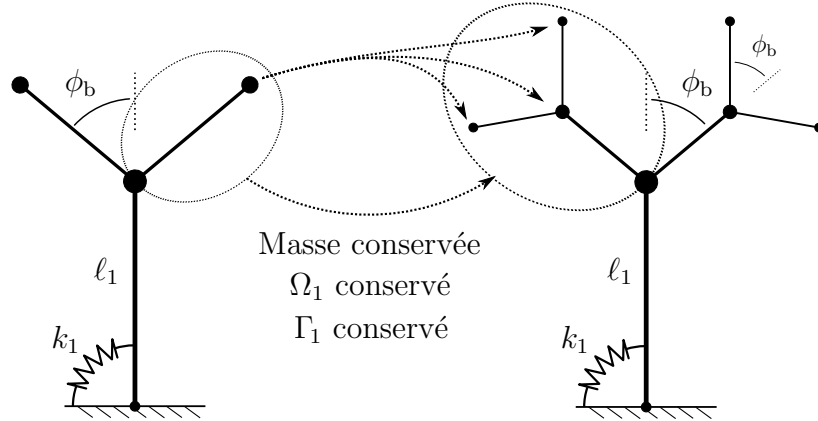


FIGURE 5.8 – Critère d'évaluation de la ramification sur l'amortissement effectif à masse, fréquence et inertie des branches conservées. Exemple à  $N = 2$  niveaux de ramifications.

Ces trois relations imposent les valeurs des rapports  $\gamma_N$ ,  $\mu_N$  et  $\kappa_N$  pour l'arbre ayant  $N$  ramifications, en fonction des rapports du modèle simplement branché  $\gamma_1$ ,  $\mu_1$  et  $\kappa_1$ . Premièrement, la masse totale des branches d'un arbre ayant  $N$  ramifications est égale à  $\sum_{n=1}^N (2\mu_N)^n$ . Par conséquent, la première relation donne le rapport  $\mu_N$  en fonction de  $\mu_1$  tel que

$$2\mu_N \frac{(2\mu_N)^N - 1}{2\mu_N - 1} = 2\mu_1. \quad (5.15)$$

Par exemple, pour un nombre infini de ramifications, le rapport des masses converge vers  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N = \mu_1/(1 + 2\mu_1)$ . Deuxièmement, la conservation du rapport des inerties de rotation  $\Gamma_1$  fournit  $\gamma_N$  en fonction de  $\gamma_1$  tel que

$$\Gamma_1(\gamma_N, \mu_N, \phi_b) = \Gamma_1(\gamma_1, \mu_1, \phi_b), \quad (5.16)$$

où  $\Gamma$  est le rapport d'inertie du modèle du chapitre 2. Enfin, la conservation du rapport des fréquences du premier mode des branches fournit  $\kappa_N$  en fonction de  $\kappa_1$  tel que

$$\Omega_1(\kappa_N, \mu_N, \gamma_N, \phi_b) = \Omega_1(\kappa_1, \gamma_1, \mu_1, \phi_b), \quad (5.17)$$

où  $\Omega$  est le rapport des fréquences du modèle du chapitre 2. Par cette méthode, il est possible d'évaluer l'influence de la ramification sur l'amortissement effectif du système (5.13) en fonction des paramètres du modèle du chapitre 2 :  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma$ .

### 5.3.3 Faibles amplitudes

Pour des faibles amplitudes de mouvement, nous allons appliquer la même approche que pour le modèle du chapitre 2 (section 2.4). Le résultat principal, dont le calcul est détaillé en annexe, montre que l'amortissement effectif est la somme de contribution de chaque mode des branches et s'exprime par

$$\xi_{\text{eff}}(N) = E_0 \sum_{n=1}^N \Gamma_n C_{n,1}^{\text{lin}^2} \bar{\xi}(\Omega_n, \xi_b), \quad (5.18)$$

où les coefficients  $C_{n,1}^{\text{lin}}$  sont les composantes linéaires des coefficients  $C_{n,1}$ . La fonction  $\bar{\xi}$  est la même que celle utilisée au chapitre 2, dont l'expression est donnée en annexe A. Notons que l'on retrouve bien le résultat du chapitre 2, équation (2.21), dans le cas d'un seul niveau de ramification avec  $N = 1$  et  $C_{1,1}^{\text{lin}} = \sin \phi_b$ . Ainsi, pour des faibles amplitudes de mouvement, chaque mode des branches contribue directement et indépendamment au mécanisme d'amortissement par le branchement.

Dans le cadre de la méthode de caractérisation de la ramification décrite précédemment, équations (5.15), (5.16) et (5.17), il est possible d'exprimer analytiquement les paramètres  $\Gamma_n$ ,  $\Omega_n$ ,  $C_{n,1}^{\text{lin}}$  et d'exprimer ainsi l'amortissement effectif. Le tableau 5.2 présente l'évolution

de l'amortissement effectif relativement au cas simplement branché avec  $N = 1$  ainsi que les contributions de chaque mode des branches, en fonction du nombre de ramifications.

$N$	$\frac{\xi_{\text{eff}}(N)}{\xi_{\text{eff}}(1)}$	Contributions modales			
		$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$
1	1	100%	–	–	–
2	0,89	85,6%	14,4%	–	–
3	0,86	84,1%	13,8%	2,1%	–
4	0,85	84,0%	13,6%	2,1%	0,3%

Tableau 5.2 – Effet de la ramification sur l'amortissement effectif pour des petites amplitudes de mouvement, équation (5.18), relativement au cas simplement branché avec  $N = 1$ , équation (2.21). Les valeurs des paramètres du modèle ramifié sont choisies en accord avec la méthode de ramification à masse constante, équations (5.15), (5.16) et (5.17), à partir des valeurs des paramètres de référence du modèle simplement branché.

On observe que l'amortissement effectif décroît avec le nombre de ramifications bien que le nombre de modes des branches augmente. Par exemple, dans le cas à deux niveaux de ramification, l'amortissement effectif est environ 0,9 fois celui obtenu avec un seul niveau de ramification. Toutefois, cette tendance converge avec la ramification vers un facteur de perte d'environ 0,85 comparé au cas simplement branché. Ainsi, un arbre infiniment branché conserve un mécanisme d'amortissement inférieur de seulement 15 % au cas simplement branché.

Nous constatons dans le tableau 5.2 que les nouveaux modes des branches ajoutés par la ramification n'interviennent pratiquement pas dans le mécanisme d'amortissement par le branchement qui reste concentré sur le premier et légèrement sur le second mode des branches. Ceci est cohérent avec l'évolution fréquentielle observée pour les arbres (tableau 5.1) puisque la fonction  $\bar{\xi}$ , qui intervient dans la contribution de chaque mode, devient faible pour des valeurs de  $\Omega$  supérieures à 3 (figure 2.4). Par conséquent, pour de faibles amplitudes de mouvement, l'évolution rapide des fréquences des modes des branches, comme observé dans le cas des arbres, empêche l'intervention des modes de fréquences éloignées dans le mécanisme d'amortissement par le branchement.

### 5.3.4 Grandes amplitudes

Dans le but d'observer l'influence de la ramification sur l'amortissement effectif pour une énergie initiale arbitraire, le système d'équations (5.13) est résolu numériquement de la même manière qu'aux chapitres 2 et 3. La figure 2.5 présente l'évolution de l'amortissement effectif résultant, calculé à partir des équations (2.13) et (2.14), en fonction de l'énergie initiale  $E_0$  et pour des niveaux de ramification allant de  $N = 1$  à 4.

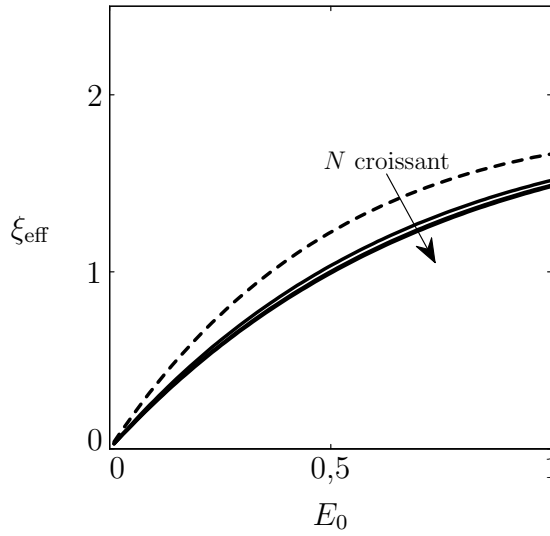


FIGURE 5.9 – Effet de l'énergie initiale  $E_0$  sur l'amortissement effectif  $\xi_{\text{eff}}$  du modèle ramifié en fonction du nombre de ramifications avec  $N = 2, 3$  et  $4$  (—). Rappel de la figure 2.5 du chapitre 2 pour  $N = 1$  (---). Les valeurs des paramètres sont les mêmes que celles utilisées au tableau 5.2.

À mesure que le nombre de ramifications  $N$  augmente, nous observons une convergence rapide vers des valeurs d'amortissement effectif légèrement inférieures au cas simplement branché ( $N = 1$ ). Ce comportement est identique à celui précédemment observé pour des faibles amplitudes de mouvement.

Dans le but de confirmer cet effet de la ramification, les figures 5.10a–d montrent les influences respectives des paramètres  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$ , et  $\Gamma$  sur l'amortissement effectif pour une énergie maximale ( $E_0 = 1$ ) et pour des valeurs croissantes du nombre de ramifications.

Nous observons un comportement général identique à celui observé à la figure 5.9 avec une convergence rapide avec le nombre de ramifications vers des valeurs légèrement inférieures de l'amortissement effectif en comparaison avec le cas simplement branché. Un

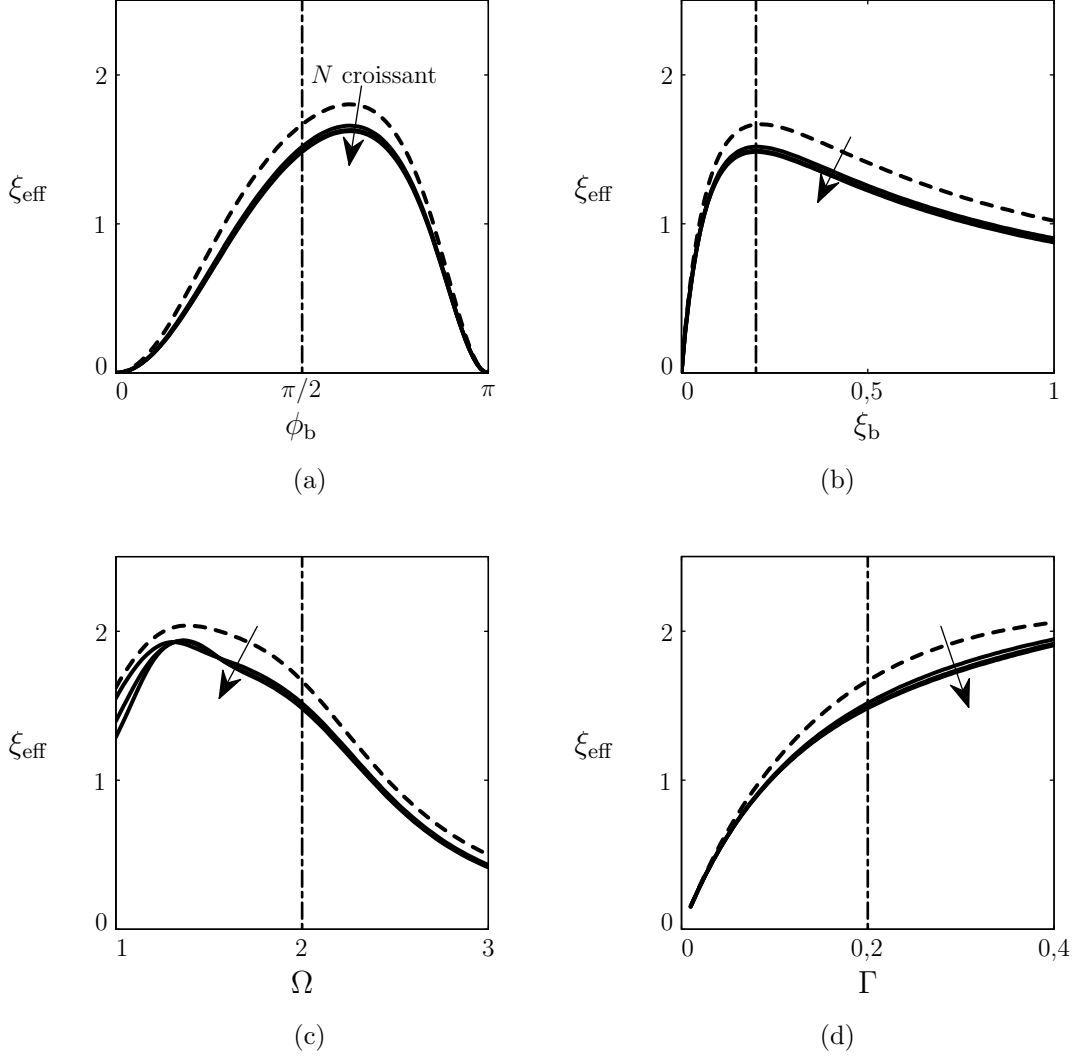


FIGURE 5.10 – Effets des quatre paramètres du modèle ramifié sur l’amortissement effectif pour une d’énergie initiale maximale ( $E_0 = 1$ ) et pour des valeurs croissantes du nombre de ramifications avec  $N = 2, 3$  et  $4$  (—). Rappels des figures 2.5a–d du chapitre 2 pour  $N = 1$  (---). Les valeurs des paramètres du modèle ramifié sont choisies d’après la méthode de ramification à masse constante, équations (5.15), (5.16) et (5.17), à partir des valeurs des paramètres  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  et  $\Gamma$ . Les valeurs de ces paramètres sont celles de référence lorsqu’ils ne varient pas, équation (2.22), indiquées sur chaque figure par un trait vertical (---).

comportement plus intéressant s'observe sur la figure 5.10c où l'influence de la ramification est moins régulière pour des valeurs du rapport des fréquences inférieures à  $\Omega = 2$ . En effet, plus  $\Omega$  se rapproche de 1 et plus les fréquences de tous les modes des branches se rapprochent de celle du mode de tronc. Par conséquent, les contributions des modes des branches au mécanisme d'amortissement par le branchement deviennent plus importantes. C'est ce qui a été observé dans les arbres au tableau 5.1, où le rapport des fréquences du premier mode des branches était proche de  $\Omega_1 = 1,2$  en moyenne.

En conclusion, il apparaît que la ramification n'augmente pas la performance du mécanisme d'amortissement par le branchement. Cependant, elle ne s'y oppose pas et n'a même pratiquement aucune influence lorsque la fréquence du premier mode des branches est proche de celle du mode de tronc. Néanmoins, les couplages entre les modes des branches sont également présents, offrant des mécanismes d'amortissement effectif d'un niveau de branchage au suivant (figure 5.7). En d'autres termes, la ramification offre une succession de mécanisme d'amortissement par le branchement dans l'architecture, où chaque niveau est protégé par les suivants. Notons que puisque ces transferts se font directement d'un mode à l'autre et que les transferts par des modes intermédiaires sont d'ordres supérieurs, un éventuel phénomène de cascade d'énergie n'est pas envisageable.

## 5.4 Modèles ramifiés continus

Dans le but d'illustrer l'influence de la ramification sur l'amortissement effectif pour des structures continues, nous étudions ici deux structures ramifiées par la méthode des éléments finis. La figure 5.11 expose les géométries et les modes propres respectifs auxquels nous nous intéressons.

Ces deux structures bio-inspirées ont le même tronc de longueur  $\ell_1$  et de diamètre  $d_1$  que le modèle du chapitre 4 ; seules les configurations des branches sont différentes. De plus, l'amortissement est ici aussi localisé uniquement sur les modes des branches (figure 5.11). La méthode de caractérisation du mécanisme d'amortissement par le branchement est la même que celle utilisée au chapitre 4 (section 4.1.2) avec une condition initiale de lâcher sur le tronc.

La première structure ramifiée possède deux niveaux de ramification avec un angle de branchement  $\phi_b = \pi/2$  à chaque niveau. Comme pour le modèle ramifié de la section précédente, le rapport des longueurs entre branches mères et filles est choisi constant. Le

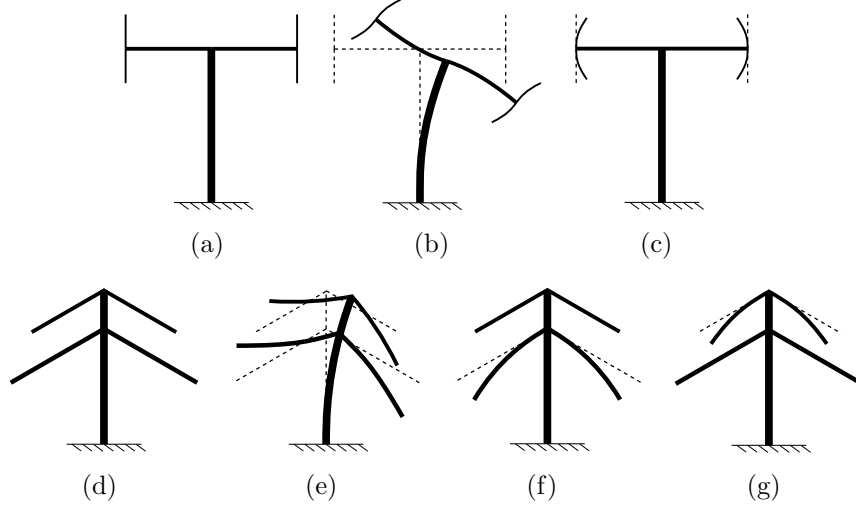


FIGURE 5.11 – Deux exemples de structures continues ramifiées. (a) Première structure ramifiée avec (b) son mode de tronc et (c) son mode des branches qui est amorti. (d) Seconde structure ramifiée avec (e) son mode de tronc, (f) son premier mode des branches, amorti et (g) son second mode des branches, amorti également.

rapport des diamètres est également choisi constant. Les valeurs de ces deux rapports sont choisies de telle manière que le rapport de la fréquence du mode des branches de niveau 2 sur la fréquence du mode de tronc soit égal à  $\Omega_2 = 1$  et que le rapport  $\Gamma$  des inerties soit égal à 0.2. Avec la même procédure qu'au chapitre 4 (section 4.1.2), un taux d'amortissement  $\xi_b = 0,2$  est introduit dans ce mode des branches.

La seconde structure ramifiée possède deux niveaux de ramification partant du tronc (figure 5.11d). Chaque niveau a un angle de branchement  $\phi_b = 2\pi/3$ . Les dimensions des branches sont telles que le rapport de la fréquence du premier mode des branches sur celle du tronc soit de 2 et que le rapport de la fréquence du second mode des branches sur celle du tronc soit de 3. Un taux d'amortissement  $\xi_b = 0,2$  est introduit dans de ces deux modes des branches.

Les amortissements effectifs de ces deux modèles sont présentés à la figure 5.12, en fonction de l'énergie initiale. Pour les deux structures ramifiées, l'amortissement effectif augmente de façon similaire au cas simplement branché (figure 4.3). Pour des niveaux d'énergie élevés, nous observons que l'amortissement effectif atteint des valeurs d'environ 3%. Notons que l'oscillation apparente avec le niveau d'énergie de l'amortissement effectif pour la seconde structure est dû à une moins bonne convergence des calculs éléments finis

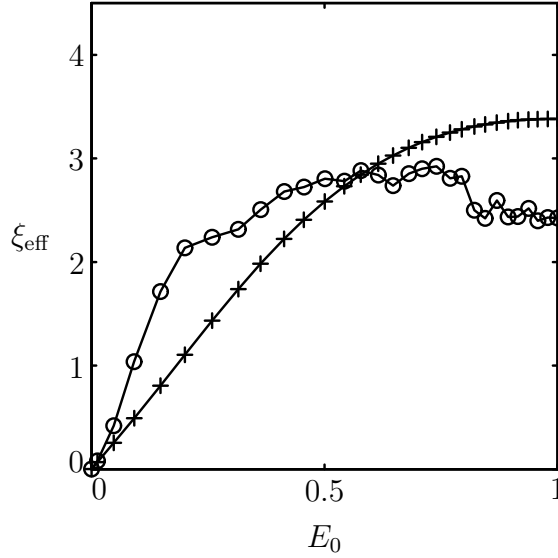


FIGURE 5.12 – Amortissement effectif en fonction de l'énergie pour les deux structures ramifiées continues. ( $\circ$ ) Première structure (figure 5.11a). ( $+$ ) Seconde structure (figure 5.11d).

que pour la première. Ainsi, le niveau d'amortissement par le branchement n'augmente pas significativement pour ces structures ramifiées par rapport à la structure continue simplement branchée du chapitre 4, Ces résultats sont cohérents avec l'analyse du modèle ramifié idéalisé précédent.

## 5.5 Discussion

L'objectif principale de ce chapitre était de démontrer l'applicabilité du concept d'amortissement par le branchement.

Basé sur le modèle branché élémentaire du chapitre 2, et inspiré du concept du TMD, un premier type d'application a été conçu, nommé TMBD pour 'Tuned-Mass-Branched-Damper'. Les performances de cet amortisseur branché de rotation ont été comparées à celles du TMD classique dont les réglages sont optimaux, ayant les mêmes rapports d'inertie et de fréquence et utilisant la même quantité de matière dissipative que le TMBD. Pour des vibrations de faible ou de très grande amplitude, le TMD reste de loin le plus performant. Néanmoins, dans une gamme d'amplitude de forçage intermédiaire, nous avons montré que le TMBD est jusqu'à 12% plus performant que le TMD. Ainsi, le TMBD



représente une application du mécanisme d'amortissement par le branchement pouvant être utilisée dans le but d'amortir passivement, et dans certains cas plus efficacement que le TMD classique, les vibrations de rotation de structures.

Puisque le mécanisme d'amortissement par le branchement a été bio-inspiré des arbres, la seconde partie de ce chapitre a porté sur l'analyse des données de la littérature sur les arbres pour les confronter aux caractéristiques du mécanisme. Bien que complexe, l'architecture ramifiée des arbres apporte un grand nombre de modes propres localisés dans les branches. En extrapolant les rapports des fréquences propres des arbres sur la base de la loi d'échelle développée par Rodriguez *et al.* (2008), nous avons montré que dans les arbres, les fréquences propres des premiers modes des branches sont dans une gamme comprise entre 1 à 3 fois celle du mode du tronc. Le mécanisme d'amortissement par le branchement, bien qu'il soit basé sur une résonance interne 1:2, s'accommode très bien de telles valeurs du rapport des fréquences. Ainsi, le mécanisme d'amortissement par le branchement est présent avec les premiers modes des branches constituant un mécanisme protecteur du tronc spécifique aux grandes amplitudes de vibration.

Par la suite, l'influence de la ramification sur le mécanisme d'amortissement par le branchement a été étudiée à l'aide d'un modèle ramifié basé sur le modèle élémentaire du chapitre 2. Nous avons montré que les transferts d'énergie entre modes suivent un schéma structuré où l'énergie peut être transmise non-linéairement vers les modes des branches supérieurs. L'énergie contenue dans le mode de tronc peut donc être transférée non-linéairement et directement vers tous les modes des branches. Par conséquent, l'amortissement effectif total est la somme des amortissements effectifs relatifs à chaque niveau de branchage. À mesure que le nombre de ramifications augmente, nous avons montré que le mécanisme d'amortissement par le branchement converge vers une valeur typiquement 15 % inférieure au cas simplement branché. Toutefois, la ramification n'empêche pas le mécanisme d'amortissement par le branchement et n'a pratiquement aucune influence lorsque la fréquence du premier mode des branches est proche de celle du mode de tronc, ce qui est le cas dans les arbres.

Enfin, pour illustrer ces résultats, nous avons étudié l'amortissement effectif de deux structures ramifiées, basées sur le modèle continu du chapitre 4. Ces structures offrent un amortissement effectif du même ordre de grandeur que pour les modèles étudiés dans les chapitres précédents. Tous ces résultats montrent la robustesse et l'applicabilité du mécanisme d'amortissement par le branchement.

# Chapitre 6

## Conclusion et perspectives

### 6.1 Conclusion

Inspirée des caractéristiques dynamiques remarquables des arbres, l'idée proposée dans cette thèse s'énonçait ainsi :

**Le branchement offre un mécanisme d'amortissement robuste et spécifique aux vibrations de grande amplitude des structures flexibles.**

Cette thèse a été étayée en trois temps. Tout d'abord, l'analyse de la dynamique d'un modèle branché à deux degrés de liberté au chapitre 2, nous a permis d'identifier un mécanisme d'amortissement par le branchement spécifique à l'amortissement des vibrations de grande amplitude. Les modes propres localisés de ce modèle ont été dénommés 'mode de tronc' et 'mode des branches'. En plus du branchement, nous avons montré que pour être efficace, ce mécanisme nécessite trois autres ingrédients : une inertie de rotation du mode des branches la plus élevée possible en comparaison à celle du mode de tronc ; un amortissement du mode des branches de l'ordre de 20 % ; et enfin, une fréquence du mode des branches d'environ deux fois celle du mode de tronc. Ce dernier ingrédient provient du fait que le mécanisme d'amortissement par le branchement repose sur un couplage non linéaire provenant des forces gyroscopiques exercées sur les branches par l'oscillation du tronc. Ainsi, la caractéristique principale de ce mécanisme est sa spécificité à l'amortissement des vibrations de grande amplitude avec un ordre de grandeur du taux

d'amortissement supplémentaire de l'ordre de 2% pour ce modèle.

Dans un second temps, la robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement vis-à-vis d'autres types de dissipation a été étudiée au chapitre 3. Nous avons montré qu'une dissipation provenant de la traînée d'un fluide au repos ne modifie pas significativement le mécanisme d'amortissement par le branchement. Pour arriver à ce résultat, une méthode de comparaison entre le modèle initial et le même modèle mais où les branches sont bloquées a été utilisée. Cette méthode a montré la contribution importante du mécanisme d'amortissement par le branchement à l'amortissement global du modèle en interaction avec un fluide au repos. Au chapitre 4, la dynamique d'un modèle branché continu a été étudiée sur les mêmes bases que pour le modèle discret du chapitre 2 et aussi par une méthode de forçage dynamique du tronc. Malgré une dynamique plus complexe et excitée différemment, nous avons montré que le mécanisme d'amortissement par le branchement dans ce modèle possède des caractéristiques très semblables à celles identifiées pour le modèle du chapitre 2 avec un amortissement supplémentaire de l'ordre de 3% apporté par le branchement. De plus, des indices quant à la contribution des modes supérieurs ont été montrés dans le cas de la structure forcée. Enfin, une expérience illustrative a été menée sur une structure branchée, dans des conditions ambiantes avec des phénomènes de dissipation peu contrôlés. Cette expérience a montré des niveaux significatifs d'amortissement par le branchement de l'ordre de 2% pour des vibrations de grande amplitude. Ce résultat a été obtenu par l'utilisation d'une méthode de comparaison analogue à celle utilisée au chapitre 3 et démontre la robustesse du concept d'amortissement par le branchement.

Pour terminer, l'applicabilité du mécanisme d'amortissement par le branchement a été étudiée au chapitre 5, tant dans une perspective d'ingénierie que de biomécanique. Pour commencer, inspiré du concept du TMD, un amortisseur branché en rotation a été conçu, nommé TMBD (Tuned-Mass-Branched-Damper). Dans une gamme d'amplitude de forçage intermédiaire de la structure à amortir, nous avons montré que le TMBD est jusqu'à 12% plus performant que le TMD. Il s'agit donc d'une application ciblée à l'amortissement passif de structures en rotation dans une gamme d'amplitude particulière. Par la suite, nous avons montré que les caractéristiques modales particulières des arbres, qui présente typiquement des rapports de fréquence entre 1 et 3 et des taux d'amortissement de l'ordre de 10% à 20% provenant de phénomènes aérodynamiques, sont entièrement compatibles avec ce mécanisme d'amortissement par le branchement. À l'aide d'une exten-

sion du modèle élémentaire du chapitre 2, nous avons étudié l'influence de la ramification sur le mécanisme d'amortissement par le branchement. Pour une masse de branchage, un rapport des fréquences et un rapport des inerties constants par rapport à un arbre ayant un seul niveau de ramification, nous avons montré qu'à mesure que le nombre de ramifications augmente, le mécanisme d'amortissement par le branchement converge vers une valeur typique de seulement 15 % inférieure au cas simplement branché du chapitre 2. La ramification n'augmente donc pas les performances du mécanisme mais offre une succession de mécanisme d'amortissement par le branchement. En d'autres termes, à l'instar du tronc, chaque niveau de ramification est protégé par les niveaux suivants. Ce mécanisme d'amortissement par le branchement, spécifique aux vibrations de grande amplitude est donc un mécanisme dynamique protecteur et complémentaire à celui décrit par James *et al.* (2006) et Spatz *et al.* (2007) dans les arbres. Enfin, le même ordre de grandeur de 3 % d'amortissement par le branchement a été obtenu pour deux structures continues ramifiées, basées sur le modèle du chapitre 4.

Quelques points doivent être mentionnés sur l'obtention de ces résultats. Le mécanisme d'amortissement par le branchement n'a été étudié que par des excitations par lâcher ou par forçage harmonique. Toutefois, rien n'indique que d'autres types d'excitation, par forçage aléatoire, par chargement fluide, ou encore par des impacts, puissent altérer le mécanisme d'amortissement par le branchement. En effet, bien que pour ces types de chargement, l'énergie initiale aurait été distribuée sur tous les modes de la structure, y compris au mode des branches, les raisons physiques de la présence du mécanisme d'amortissement par le branchement auraient été toujours présentes. De telles analyses auraient simplement rendu l'identification et la quantification de l'amortissement par le branchement plus complexes. De même, la présence éventuelle d'effets dus à la gravité ne semble pas affecter le mécanisme pour l'expérience menée au chapitre 4. La gravité elle-même peut être à l'origine de couplages par non-linéarités géométriques, comme pour le cas du 'spring-pendulum' (Nayfeh & Mook, 2008). Enfin, à l'exception de l'expérience illustrative, nous avons uniquement étudié des mouvements s'effectuant dans le plan. Dans des structures de type poutre, les mouvements de torsion sont pourtant présents et sont souvent associés à des couplages non linéaires avec les mouvements de flexion (Ballard & Millard, 2009). Ainsi, nous pouvons très bien imaginer un mode de torsion du tronc exerçant des forces gyroscopiques sur les modes des branches, le mécanisme d'amortissement par le branchement serait alors très semblable entre ces deux modes.

## 6.2 Perspectives

Deux types de perspectives sont proposées ici : celles regardant l'ingénierie et celles concernant la biomécanique des arbres.

Le modèle du TMBD du chapitre 5 a montré l'applicabilité du mécanisme d'amortissement par le branchement à l'amortissement curatif de structure en rotation, spécifique aux vibrations de grande amplitude. Ces résultats demandent à être validés expérimentalement mais ce concept pourrait être une extension de systèmes tels que ceux développés par Olson & Shaw (2010) pour l'amortissement des ailettes de rotors. Le TMBD pourrait également être utilisé pour amortir les vibrations de rotation et de translation simultanément. Par exemple, les oscillations de translation verticale de la structure principale de la figure 5.1 devraient être amorties par le mode des branches, à la manière d'un TMD. Une étude des couplages non linéaire d'un tel système pourrait mettre en avant des comportements intéressants pour des grandes amplitudes de mouvement. Ainsi, une idée d'application du TMBD pourrait être l'amortissement curatif des vibrations de grande amplitude de structures telles que les plaques ou les câbles. Curieusement, pour les câbles, la forme branchée se retrouve déjà pour des TMDs (figure 6.1) utilisés sur des lignes à hautes tensions (Markiewicz, 1995). Cependant, bien que branchés, ces dispositifs ne sont pas réglés pour le mécanisme d'amortissement par le branchement.



FIGURE 6.1 – Photographie d'un TMD en rotation ('Stockbridge damper') utilisé pour l'amortissement des vibrations de câbles.

Le modèle en interaction avec un fluide au repos, utilisé au chapitre 3, pourrait être directement utilisé dans le but de montrer l'influence de conditions d'excitation par le fluide sur le mécanisme d'amortissement par le branchement. L'étude d'une interaction avec un fluide en mouvement, par un écoulement permanent ou par une condition initiale de type rafale par exemple, permettrait d'étendre encore plus loin la notion de robustesse du mécanisme d'amortissement par le branchement. De plus, le modèle d'interaction

fluide utilisé pourrait être aisément incorporé dans le modèle ramifié du chapitre 5. Une telle étude permettrait de déterminer l'effet du branchement sur des phénomènes tels que la masse fluide ajoutée ou l'amortissement non linéaire induit par l'écoulement qui permettrait de compléter les résultats de Rodriguez (2009) sur l'influence de la ramification dans les arbres. Il serait possible, par exemple, de quantifier la répartition de l'énergie apportée par une rafale sur les modes propres de ce modèle.

Pour terminer, une détermination du rôle du feuillage dans la dynamique des arbres est une étape fondamentale à la compréhension des mécanismes dissipatifs des arbres. Des modélisations de ces interactions complexes pourraient être incorporées à des modèles utilisés dans cette thèse. De plus, la poursuite des études d'autres mécanismes d'amortissement non linéaires tels que les impacts (Rudnicki *et al.*, 2008) permettrait de compléter la liste des mécanismes d'amortissements des arbres, et pourquoi pas, inspirer de nouveaux concepts d'amortissement en ingénierie.



# Bibliographie

- AREEMIT, N. & WARNITCHAI, P. 2001 Vibration suppression of a 90-m-tall steel stack by using a high-damping tuned mass damper. In *Proceedings of the Eighth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, Nanyang Technological University, Singapore*.
- BALLARD, P. & MILLARD, A. 2009 *Poutres et arcs élastiques*. Editions Ecole Polytechnique.
- BLEVINS, R.D. 1990 *Flow-induced vibration*. Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- BRÜCHERT, F. & GARDINER, B. 2006 The effect of wind exposure on the tree aerial architecture and biomechanics of sitka spruce (*picea sitchensis*, pinaceae). *American journal of botany* **93** (10), 1512–1521.
- BRÜCHERT, F., SPECK, O. & SPATZ, H.C. 2003 Oscillations of plants' stems and their damping : theory and experimentation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B : Biological Sciences* **358** (1437), 1487.
- BURNS, L., MOURITZ, AP, POOK, D. & FEIH, S. 2011 Bio-inspired design of aerospace composite joints for improved damage tolerance. *Composite Structures* .
- CASTRO-GARCÍA, S., BLANCO-ROLDÁN, G.L., GIL-RIBES, J.A. & AGÜERA-VEGA, J. 2008 Dynamic analysis of olive trees in intensive orchards under forced vibration. *Trees-Structure and Function* **22** (6), 795–802.
- DEN HARTOG, J.P. 2007 *Mechanical vibrations*. Read Books.
- DORMAND, J.R. & PRINCE, P.J. 1980 A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics* **6** (1), 19–26.



- FRAHM, H. 1911 Vibrations of bodies. US Patent 989,958.
- GOSSELIN, F., DE LANGRE, E. & MACHADO-ALMEIDA, B.A. 2010 Drag reduction of flexible plates by reconfiguration. *J. Fluid Mech* **650**, 319–341.
- GRUBER, P. 2011 *Biomimetics in Architecture : Architecture of Life and Buildings*. Springer Vienna Architecture.
- HUMAR, J.L. 2002 *Dynamics of structures*. Taylor & Francis Group.
- JAMES, K.R., HARITOS, N. & ADES, P.K. 2006 Mechanical stability of trees under dynamic loads. *American Journal of Botany* **93** (10), 1522.
- JERONIMIDIS, G. & ATKINS, AG 1995 Mechanics of biological materials and structures : Nature's lessons for the engineer. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science 1989-1996 (vols 203-210)* **209** (43), 221–235.
- JONSSON, MJ, FOETZKI, A., KALBERER, M., LUNDSTRÖM, T., AMMANN, W. & STÖCKLI, V. 2007 Natural frequencies and damping ratios of norway spruce (*picea abies* (l.) karst) growing on subalpine forested slopes. *Trees-Structure and Function* **21** (5), 541–548.
- DE LANGRE, E. 2002 *Fluides et solides*. Editions Ecole Polytechnique.
- DE LANGRE, E. 2012 Methodological advances in predicting flow-induced dynamics of plants using mechanical-engineering theory. *The Journal of Experimental Biology* **215** (6), 914–921.
- LOPEZ, D., MICHELIN, S. & DE LANGRE, E. 2011 Flow-induced pruning of branched systems and brittle reconfiguration. *Journal of Theoretical Biology* .
- MARKIEWICZ, M. 1995 Optimum dynamic characteristics of stockbridge dampers for dead-end spans. *Journal of sound and vibration* **188** (2), 243–256.
- MCMAHON, T.A. & KRONAUER, R.E. 1976 Tree structures : deducing the principle of mechanical design. *Journal of theoretical biology* **59** (2), 443–466.

- MILLER, L.A. 2005 Structural dynamics and resonance in plants with nonlinear stiffness. *Journal of theoretical biology* **234** (4), 511–524.
- MOORE, J.R. & MAGUIRE, D.A. 2005 Natural sway frequencies and damping ratios of trees : influence of crown structure. *Trees-Structure and Function* **19** (4), 363–373.
- MOORE, J.R. & MAGUIRE, D.A. 2007 Simulating the dynamic behavior of douglas-fir trees under applied loads by the finite element method. *Tree Physiology* **28** (1), 75.
- MOULIA, B., COUTAND, C. & LENNE, C. 2006 Posture control and skeletal mechanical acclimation in terrestrial plants : implications for mechanical modeling of plant architecture. *American Journal of Botany* **93** (10), 1477–1489.
- NAYFEH, A.H. & MOOK, D.T. 2008 *Nonlinear oscillations*. Wiley-VCH.
- NIKLAS, K.J. 1992 *Plant biomechanics : an engineering approach to plant form and function*. University of Chicago Press.
- OLSON, BJ & SHAW, SW 2010 Vibration absorbers for a rotating flexible structure with cyclic symmetry : nonlinear path design. *Nonlinear dynamics* **60** (1), 149–182.
- PAÏDOUSSIS, M., PRICE, S. & DE LANGRE, E. 2011 *Fluid-Structure Interactions : Cross-Flow-Induced Instabilities*. Cambridge University Press.
- PEETERS, M., VIGUIÉ, R., SÉRANDOUR, G., KERSCHEN, G. & GOLINVAL, J.C. 2009 Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical systems and signal processing* **23** (1), 195–216.
- PREUMONT, A. 2002 *Vibration control of active structures : an introduction*. Springer.
- PRUSINKIEWICZ, P. & LINDENMAYER, A. 1991 The algorithmic beauty of plants (the virtual laboratory) .
- RODRIGUEZ, M. 2009 évolution et organisation spatiale de la dynamique vibratoire des arbres au cours de leur développement. PhD thesis, École Polytechnique.
- RODRIGUEZ, M., DE LANGRE, E. & MOULIA, B. 2008 A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization. *American Journal of Botany* **95** (12), 1523.

- ROSENBERG, R.M. 1962 The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of applied Mechanics* **29**, 7.
- RUDNICKI, M., MEYER, T.H., LIEFFERS, V.J., SILINS, U. & WEBB, V.A. 2008 The periodic motion of lodgepole pine trees as affected by collisions with neighbors. *Trees-Structure and Function* **22** (4), 475–482.
- SAUER, FM, FONS, WL & STOREY, TG 1954 Blast damage to coniferous tree stands by atomic explosions. project 3.19 of operation upshot-knothole. *Tech. Rep.*. Forest Service. Div. of Fire Research.
- SCANNELL, B. 1984 Quantification of the interactive motions of the atmospheric surface layer and a conifer canopy. PhD thesis, Cranfield Institute of Technology, Bedford, UK.
- SCHINDLER, D., VOGT, R., FUGMANN, H., RODRIGUEZ, M., SCHÖNBORN, J. & MAYER, H. 2010 Vibration behavior of plantation-grown scots pine trees in response to wind excitation. *Agricultural and Forest Meteorology* **150** (7), 984–993.
- SELLIER, D., FOURCAUD, T. & LAC, P. 2006 A finite element model for investigating effects of aerial architecture on tree oscillations. *Tree Physiology* **26** (6), 799–806.
- SEMLER, C., ALIGHANBARI, H. & PAÏDOUSSIS, MP 1998 A physical explanation of the destabilizing effect of damping. *Journal of applied mechanics* **65**, 642.
- SHAW, S.W. & PIERRE, C. 1993 Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration* **164** (1), 85–124.
- SINGH, K., MICHELIN, S. & DE LANGRE, E. 2012 Energy harvesting from axial fluid-elastic instabilities of a cylinder. *Journal of Fluids and Structures* .
- SPATZ, H.C., BRUCHERT, F. & PFISTERER, J. 2007 Multiple resonance damping or how do trees escape dangerously large oscillations? *American Journal of Botany* **94**, 1603–1611.
- SPATZ, H.C., EMANNS, A. & SPECK, O. 2004 The structural basis of oscillation damping in plant stems-biomechanics and biomimetics. *Journal of Bionics Engineering* **1** (3), 149–158.

- SPECK, O. & SPATZ, H.C. 2004 Damped oscillations of the giant reed *arundo donax* (poaceae). *American Journal of Botany* **91** (6), 789.
- SPECK, T. & BURGERT, I. 2011 Plant stems : functional design and mechanics. *Annual Review of Materials Research* **41**, 169–193.
- SPECK, T., LUCHSINGER, R., BUSCH, S., RÜGGERBERG, M. & SPECK, O. 2006 Self-healing processes in nature and engineering : self-repairing biomimetic membranes for pneumatic structures. *Design and nature* **3**, 105–114.
- SPECK, T., SPECK, O., BEHESHTI, N. & MCINTOSH, AC 2008 Process sequences in biomimetic research.
- TELEWSKI, F.W. 2006 A unified hypothesis of mechanoperception in plants. *American Journal of Botany* **93** (10), 1466–1476.
- TOUZÉ, C., THOMAS, O. & HUBERDEAU, A. 2004 Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures. *Computers & structures* **82** (31), 2671–2682.
- VAKAKIS, A.F. & GENDELMAN, O.V. 2009 *Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems*. Springer Verlag.
- VERPEAUX, P., CHARRAS, T. & MILLARD, A. 1988 Castem 2000 : une approche moderne du calcul des structures. *Calcul des structures et intelligence artificielle* pp. 261–271.
- VOGEL, S. 1984 Drag and flexibility in sessile organisms. *American Zoologist* **24** (1), 37–44.
- WATT, MS, MOORE, JR & MCKINLAY, B. 2005 The influence of wind on branch characteristics of *pinus radiata*. *Trees-Structure and Function* **19** (1), 58–65.
- YOON, S.H. & PARK, S. 2011 A mechanical analysis of woodpecker drumming and its application to shock-absorbing systems. *Bioinspiration & Biomimetics* **6**, 016003.



# Annexe A

## Compléments au chapitre 2

### A.1 Expression analytique de la fonction $\bar{\xi}$

Nous détaillons ici le calcul analytique de la fonction  $\bar{\xi}$ . Cette fonction intervient dans l'expression de l'amortissement effectif pour des petites amplitudes de mouvement du modèle à deux degrés de liberté du chapitre 2, équation (2.21).

En remarquant que  $\sin^2 \tau = (1 - \cos 2\tau)/2$ , et en posant

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Omega^2} + \frac{2\Phi}{\Theta_0^2 \sin \phi_b} , \quad (\text{A.1})$$

l'équation (2.20) devient

$$\ddot{\bar{\Phi}} + 2\Omega\xi_b \dot{\bar{\Phi}} + \Omega^2 \bar{\Phi} = \cos 2\tau . \quad (\text{A.2})$$

La solution de l'équation (A.2) est la somme d'une solution transitoire, notée  $\bar{\Phi}_T$ , et d'une solution en régime établi, notée  $\bar{\Phi}_S$ , dont les expressions respectives sont

$$\bar{\Phi}_T(\tau) = e^{-\xi_b \Omega \tau} (c_1 \cos \Omega_d \tau + c_2 \sin \Omega_d \tau) , \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\Phi}_S(\tau) = \mathcal{Z}((\Omega^2 - 4) \cos 2\tau + 4\Omega\xi_b \sin 2\tau) , \quad (\text{A.4})$$

où  $\Omega_d = \Omega\sqrt{1 - \xi_b^2}$ ,  $\mathcal{Z} = (16\Omega^2 \xi_b^2 + (\Omega^2 - 4)^2)^{-1}$  et où  $c_1$  et  $c_2$  sont des variables dépendant des conditions initiales. D'après les conditions initiales données à l'équation (2.11) et le changement de variable (A.1), on doit avoir  $\bar{\Phi}(0) = \bar{\Phi}_T(0) + \bar{\Phi}_S(0) = 1/\Omega^2$  et

$\dot{\Phi}(0) = 0$ . Ce qui implique

$$c_1 = \frac{1}{\Omega^2} - (\Omega^2 - 4)\mathcal{Z} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\Omega\xi_b}{\Omega_d}(c_1 - 8\mathcal{Z}). \quad (\text{A.5})$$

Par conséquent, en utilisant successivement les équations (2.13) et (2.14), la fonction  $\bar{\xi}$  de l'équation (2.21), qui est proportionnelle à  $\int_0^{2\pi} \dot{\Phi}^2 d\tau$ , s'exprime par

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(\Omega, \xi_b) = \frac{\pi\Omega\xi_b}{16} & \left( 4\pi\mathcal{Z} - 8A\mathcal{Z}e^{-2\pi\Omega\xi_b} \sin 2\pi\Omega_d + 8B\mathcal{Z}(1 - e^{-2\pi\Omega\xi_b} \cos 2\pi\Omega_d) \right. \\ & + \frac{A^2 + B^2}{4\Omega\xi_b} (1 - e^{-4\pi\Omega\xi_b}) \\ & + \frac{A^2 - B^2}{4\Omega^2} \left( \Omega\xi_b(e^{-4\pi\Omega\xi_b} \cos 4\pi\Omega_d - 1) - \Omega_d e^{-4\pi\Omega\xi_b} \sin 4\pi\Omega_d \right) \\ & \left. - \frac{AB}{2\Omega^2} \left( \Omega_d(e^{-4\pi\Omega\xi_b} \cos 4\pi\Omega_d - 1) - \Omega\xi_b e^{-4\pi\Omega\xi_b} \sin 4\pi\Omega_d \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où  $A = -\Omega\xi_b c_2 - \Omega_d c_1$ ,  $B = \Omega_d c_2 - \Omega\xi_b c_1$  et où le coefficient  $\frac{\pi}{16}$  vient de la normalisation choisie pour l'énergie  $E$ . In fine,  $\bar{\xi}$  ne dépend que du rapport de fréquence  $\Omega$  et du taux d'amortissement du mode des branches  $\xi_b$ . Cette fonction est tracée à la figure 2.4.

# Annexe B

## Compléments au chapitre 3

### B.1 Expression de la fonction $\bar{\xi}_n$

Nous détaillons ici le calcul analytique de la fonction  $\bar{\xi}_n$  de l'équation (3.4). Cette fonction intervient dans l'expression de l'amortissement effectif pour des petites amplitudes de mouvement du modèle à deux degrés de liberté dont le mode des branches est amorti non-linéairement.

La solution en vitesse de l'équation (3.3) est

$$\dot{\Phi} = \frac{-\Omega \sin 2\tau + 2 \sin \Omega\tau}{\Omega(\Omega^2 - 4)} . \quad (\text{B.1})$$

En utilisant successivement les équations (2.13) et (2.14), la fonction  $\bar{\xi}_n$  de l'équation (3.4) s'exprime par

$$\bar{\xi}_n(\Omega) = \frac{2\pi^{2n-1}}{4^{n+1}} \int_0^{2\pi} 2\Omega \dot{\Phi}^2 |\dot{\Phi}|^{n-1} d\tau , \quad (\text{B.2})$$

où le coefficient  $2\pi^{2n-1}/4^{n+1}$  provient de la normalisation choisie pour l'énergie initiale  $E_0$ . Des exemples numériques en fonction de  $\Omega$  pour  $n = 2, 3, 4$  sont tracés à la figure 2.4.

### B.2 Calculs des moments dus au fluide

On détaille ici les calculs des moments de forces  $M_\theta$  s'exerçant sur le mode de tronc, équation (3.8), et  $M_\phi$  sur le mode des branches, équation (3.9), dans le cas du modèle en



interaction avec un fluide au repos.

Nous exprimons préalablement les forces locales dues au fluide à partir des équations générales (3.6) et (3.5). La vitesse locale sur le tronc s'exprime par

$$\underline{V} = -\dot{\theta}s \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

où  $s$  représente la distance à la base du tronc. Le vecteur directeur du tronc est

$$\underline{s}_1 = \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{vmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Puisque  $\underline{V} \cdot \underline{s}_1 = 0$ , nous obtenons directement  $\underline{V}_n = \underline{V}$  d'après l'équation (3.6). En utilisant cette expression dans l'équation (3.5), la densité linéique de force de traînée s'exerçant localement sur le tronc s'exprime par

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{2} \rho_f C_D d_1 |\dot{\theta}| \dot{\theta} s^2 \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas des branches, la vitesse locale s'exprime par

$$\underline{V} = -\dot{\theta} \ell_1 \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{vmatrix} - (\dot{\theta} \pm \dot{\phi}) s \begin{vmatrix} \cos(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \\ \sin(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \end{vmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

où ici  $s$  représente la distance à la base de la branche. Le signe ' $\pm$ ' est '+' pour la branche de droite et '-' pour celle de gauche. Le vecteur directeur est

$$\underline{s}_{2\pm} = \begin{vmatrix} -\sin(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \\ \cos(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \end{vmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

En remplaçant ses deux expressions dans l'équation (3.6), nous obtenons la composante

normale de la vitesse

$$\underline{V}_n = -(\dot{\theta}S \pm \dot{\phi}s) \begin{vmatrix} \cos(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \\ \sin(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \end{vmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

où  $S = s + \ell_1 \cos(\phi_b + \phi)$ . En utilisant cette expression dans l'équation (3.5), la densité linéique de force de traînée s'exerçant localement sur les branches s'exprime par

$$\underline{f}_2 = \frac{1}{2} \rho_f C_D d_2 |\dot{\theta}S \pm \dot{\phi}s| (\dot{\theta}S \pm \dot{\phi}s) \begin{vmatrix} \cos(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \\ \sin(\theta \pm (\phi_b + \phi)) \end{vmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

L'intégration de ces forces linéiques locales sur la structure projetées sur le mode de tronc correspond à la somme des moments exercés à la base du tronc par chaque segment et donne

$$M_\theta = \int_0^{\ell_1} s \underline{s}_1 \wedge \underline{f}_1 ds + \int_0^{\ell_2} (\ell_1 \underline{s}_1 + s \underline{s}_{2+}) \wedge \underline{f}_{2+} ds + \int_0^{\ell_2} (\ell_1 \underline{s}_1 + s \underline{s}_{2-}) \wedge \underline{f}_{2-} ds. \quad (\text{B.10})$$

La projection sur le mode des branches est la différence des moments exprimés à la base de chaque branche,

$$M_\phi = \int_0^{\ell_2} s \underline{s}_{2+} \wedge \underline{f}_{2+} ds - \int_0^{\ell_2} s \underline{s}_{2-} \wedge \underline{f}_{2-} ds \quad (\text{B.11})$$

Il suffit de remplacer dans ces deux équations les expressions des forces  $\underline{f}$ , équations (B.5) et (B.9), et les vecteurs directeurs  $\underline{s}$ , équations (B.4) et (B.7), pour finalement obtenir les équations (3.8) et (3.9).



# Annexe C

## Compléments au chapitre 5

### C.1 Équations du modèle ramifié

Nous détaillons ici le calcul des équations du mouvement du modèle ramifié. Pour rendre ces calculs lisibles, nous introduisons la variable  $\psi_{\mathbf{n}}$  définissant tous les degrés de liberté du modèle où nous distinguons l'indice  $\mathbf{n}$  de l'indice  $n$  utilisé dans le chapitre 5. Ainsi, nous avons  $\psi_1 = \theta$  pour le tronc et  $\psi_{\mathbf{n}} = \phi_{\mathbf{n}-1}$  avec  $\mathbf{n}$  variant de 2 à  $N+1$  pour les modes des branches.

Chaque niveau  $\mathbf{n}$  comporte  $2^{\mathbf{n}-1}$  masses identiques. L'énergie cinétique est donc la somme de l'énergie cinétique de chaque masse :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \sum_{\mathbf{n}=1}^{N+1} \mu_N^{\mathbf{n}-1} \sum_{m=1}^{2^{\mathbf{n}-1}} v_{\mathbf{n},m}^2, \quad (\text{C.1})$$

où  $v_{\mathbf{n},m}$  est la vitesse de la  $m$ -ième masse du niveau  $\mathbf{n}$  dont l'expression est

$$v_{\mathbf{n},m}^2 = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} \lambda_N^{i-1} \lambda_N^{j-1} \left( \sum_{k=1}^i (\pm)_{\mathbf{n},m,k} \dot{\psi}_k \right) \left( \sum_{k=1}^j (\pm)_{\mathbf{n},m,k} \dot{\psi}_k \right) \cos V_{\mathbf{n},m,i,j}, \quad (\text{C.2})$$

où

$$V_{\mathbf{n},m,i,j} = \sum_{k=1}^i (\pm)_{\mathbf{n},m,k} (\psi_k + \phi_b) - \sum_{k=1}^j (\pm)_{\mathbf{n},m,k} (\psi_k + \phi_b). \quad (\text{C.3})$$

La fonction  $(\pm)_{\mathbf{n},m,k}$  vaut 1, 0 ou  $-1$  suivant les indices  $\mathbf{n}, m$  et  $k$ . Cette fonction est

construite à la manière d'une table de vérité, dont le début pour  $\mathbf{n}$  allant de 1 à 3 est donné au tableau suivant

$\mathbf{n}$	$m$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	1	1	0	0
2	1	1	1	0
2	2	1	-1	0
3	1	1	1	1
3	2	1	1	-1
3	3	1	-1	1
3	4	1	-1	-1

Tableau C.1 – Construction de la fonction  $(\pm)_{\mathbf{n},m,k}$  pour  $\mathbf{n}$  allant de 1 à 3.

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de chaque niveau :

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 \ell_1^2 \sum_{\mathbf{n}=1}^{N+1} 2^{\mathbf{n}-1} \kappa_N^{\mathbf{n}-1} \psi_{\mathbf{n}}^2. \quad (\text{C.4})$$

Après utilisation des équations de Lagrange avec ces énergies, équations (C.1) et (C.4), le système d'équations sur les  $N + 1$  degrés de liberté s'exprime par

$$2^{x-1} k_1 \kappa_N^{x-1} \psi_x + m_1 \ell_1^2 \sum_{\mathbf{n}=x}^{N+1} \mu_N^{\mathbf{n}-1} \sum_{i=x}^{\mathbf{n}} \lambda_N^{i-1} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{\mathbf{n}-1}} (\pm)_{\mathbf{n},m,x} \left[ \left( \sum_{k=1}^j (\pm)_{\mathbf{n},m,k} \ddot{\psi}_k \right) \cos V_{\mathbf{n},m,i,j} \right. \\ \left. + \left( \sum_{k=1}^j (\pm)_{\mathbf{n},m,k} \dot{\psi}_k \right)^2 \sin V_{\mathbf{n},m,i,j} \right] = 0, \quad (\text{C.5})$$

pour  $x$  allant de 1 à  $N+1$ .

Pour simplifier le système d'équation (C.5), il est possible de montrer numériquement que le terme d'inertie se simplifie par

$$\sum_{m=1}^{2^{\mathbf{n}-1}} \sum_{k=1}^j (\pm)_{\mathbf{n},m,x} (\pm)_{\mathbf{n},m,k} \ddot{\psi}_k \cos V_{\mathbf{n},m,i,j} = \ddot{\psi}_x \sum_{m=1}^{2^{\mathbf{n}-1}} \cos V_{\mathbf{n},m,i,j}. \quad (\text{C.6})$$

Par conséquent, le système (C.5) devient

$$J_x \ddot{\psi}_x + 2^{x-1} k_1 \kappa_N^{x-1} \psi_x = -m_1 \ell_1^2 \sum_{n=x}^{N+1} \mu_N^{n-1} \sum_{i=x}^n \lambda_N^{i-1} \sum_{j=1}^n \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (\pm)_{n,m,x} \left( \sum_{k=1}^j (\pm)_{n,m,k} \dot{\psi}_k \right)^2 \sin V_{n,m,i,j}, \quad (\text{C.7})$$

pour  $x$  allant de 1 à  $N+1$  et où  $J_x$  est un terme d'inertie non linéaire donné par

$$J_x = m_1 \ell_1^2 \sum_{n=x}^{N+1} \mu_N^{n-1} \sum_{i=x}^n \lambda_N^{i-1} \sum_{j=x}^n \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \cos V_{n,m,i,j}. \quad (\text{C.8})$$

Ce terme peut être décomposé en une partie linéaire  $J_x^{\text{lin}}$  donnée par

$$J_x = m_1 \ell_1^2 \sum_{n=x}^{N+1} \mu_N^{n-1} \sum_{i=x}^n \lambda_N^{i-1} \sum_{j=x}^n \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \cos \left( \sum_{k=1}^i (\pm)_{n,m,k} \phi_b - \sum_{k=1}^j (\pm)_{n,m,k} \phi_b \right), \quad (\text{C.9})$$

et une partie purement non linéaire  $J_x^{\text{NL}} = J_x - J_x^{\text{lin}}$ . De plus, en remarquant que

$$\left( \sum_{k=1}^j (\pm)_{n,m,k} \dot{\psi}_k \right)^2 = \sum_{k=1}^j \dot{\psi}_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{q=k+1}^j (\pm)_{n,m,k} (\pm)_{n,m,q} \dot{\psi}_k \dot{\psi}_q, \quad (\text{C.10})$$

l'équation (C.7) peut encore être simplifiée et devient

$$J_x^{\text{lin}} \ddot{\psi}_x + 2^{x-1} k_1 \kappa_N^{x-1} \psi_x = J_x^{\text{NL}} \ddot{\psi}_x + \dot{\psi}_x \left( \sum_{k=x+1}^{N+1} h_{x,k} \dot{\psi}_k \right) + \sum_{k=1}^{x-1} c_{x,k} \dot{\psi}_k^2, \quad (\text{C.11})$$

pour  $x$  allant de 1 à  $N+1$ .

Les termes de gauche du système d'équations (C.11) sont purement linéaires et les termes de droite purement non linéaires. Les coefficients  $h_{x,k}$  et  $c_{x,k}$  s'expriment respectivement

$$h_{x,k} = -2m_1 \ell_1^2 \sum_{n=k}^N \mu_N^{n-1} \sum_{i=x}^n \lambda_N^{i-1} \sum_{j=k}^n \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (\pm)_{n,m,k} \sin V_{n,m,i,j}, \quad (\text{C.12})$$

$$\text{et} \quad c_{x,k} = -m_1 \ell_1^2 \sum_{n=k}^N \mu_N^{n-1} \sum_{i=x}^n \lambda_N^{i-1} \sum_{j=k}^n \lambda_N^{j-1} \sum_{m=1}^{2^{n-1}} (\pm)_{n,m,x} \sin V_{n,m,i,j}. \quad (\text{C.13})$$

Le système (C.11) est adimensionné en posant :  $\omega_x^2 = 2^{x-1} k_1 \kappa_N^{x-1} / J_x^{\text{lin}}$  la pulsation du mode propre se rapportant à  $\psi_x$  ; le temps adimensionné  $\tau = \omega_1 t$  ; et enfin  $\Theta(\tau) = \psi_1(t) \lambda_N^{1/2}$  pour le mode de tronc et  $\Phi_n(\tau) = \psi_{n+1}(t)$  pour  $n$  allant de 1 à  $N$  pour les modes des branches. Enfin, les coefficients du système d'équations (5.13) s'expriment par

$$\Omega_n = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_1}, \quad C_{n,p} = \frac{c_{n+1,p}}{J_{n+1}^{\text{lin}}}, \quad H_{n,p} = \lambda_N \frac{h_{n+1,p} J_1^{\text{lin}}}{J_{n+1}^{\text{lin}} J_{p+1}^{\text{lin}}}, \quad \text{et} \quad \Lambda_x = \frac{J_x^{\text{NL}}}{J_x^{\text{lin}}}, \quad (\text{C.14})$$

pour  $n$  allant de 1 à  $N$ .

## C.2 Calcul à faibles amplitudes

Nous détaillons ici le calcul menant à l'équation (5.18) pour des petites amplitudes initiales du tronc telles que  $\Theta(0) = \Theta_0 = \varepsilon$ , où  $\varepsilon \ll 1$  est un petit paramètre. C'est une simple extension de la méthode utilisée à la section 2.4 du chapitre 2.

Les angles  $\Theta$  et  $\Phi_n$ , pour  $n$  variant de 1 à  $N$ , sont exprimés en séries de puissance de  $\varepsilon$  jusqu'à l'ordre deux par

$$\Theta(\tau) = \varepsilon \vartheta_1(\tau) + \varepsilon^2 \vartheta_2(\tau), \quad (\text{C.15})$$

$$\Phi_n(\tau) = \varepsilon \varphi_{n,1}(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_{n,2}(\tau). \quad (\text{C.16})$$

La condition initiale (2.11) implique directement

$$\vartheta_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_2(0) = \varphi_{n,1}(0) = \varphi_{n,2}(0) = 0. \quad (\text{C.17})$$

En substituant les équations (C.15) et (C.16) dans le système dynamique (2.10), et en utilisant les équations (C.17), les termes de premier ordre s'équilibrent si

$$\vartheta_1 = \cos \tau \quad \text{et} \quad \varphi_{n,1} = 0. \quad (\text{C.18})$$

L'équilibre au second ordre implique  $\vartheta_2 = 0$  et

$$\ddot{\Phi}_n + 2\Omega_n \xi_b \dot{\Phi}_n + \Omega_n^2 \Phi_n = C_{n,1}^{\text{lin}} \Theta_0^2 \sin^2 \tau. \quad (\text{C.19})$$

Ainsi, le système (5.13) se simplifie en une série d'oscillateurs linéaires découplés entre

eux et forcés par l'oscillation du mode de tronc. La quantité d'énergie dissipée par un mode des branches de niveau  $n$  est donc

$$\Delta E_n = \frac{8}{\pi^2} \Gamma_n \int_0^{2\pi} 2\Omega_n \xi_b \dot{\Phi}_n^2 d\tau. \quad (\text{C.20})$$

Par conséquent, l'amortissement effectif correspondant, défini par les équations (2.14) et (2.13), s'exprime par

$$\xi_{\text{eff}_n} = E_0 \Gamma_n C_{n,1}^{\text{lin}^2} \bar{\xi}(\Omega_n, \xi_b). \quad (\text{C.21})$$

L'amortissement effectif total, équation (5.18), est alors donné par la somme des ces contributions.





# Annexe D

## Article

**Damping by branching: a bioinspiration from trees**

THECKES, B., DE LANGRE, E. & BOUTILLON, X.

*IOP – Bioinspir. Biomim.*, 2011, **6**, 046010

# Damping by branching: a bioinspiration from trees

B Theckes<sup>1</sup>, E de Langre<sup>1</sup> and X Boutillon<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mechanics, LadHyX, CNRS-École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

<sup>2</sup> Department of Mechanics, LMS, CNRS-École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

E-mail: [benoit.theckes@polytechnique.edu](mailto:benoit.theckes@polytechnique.edu)

Received 26 May 2011

Accepted for publication 4 October 2011

Published 8 November 2011

Online at [stacks.iop.org/BB/6/046010](http://stacks.iop.org/BB/6/046010)

## Abstract

Man-made slender structures are known to be sensitive to high levels of vibration due to their flexibility which often cause irreversible damage. In nature, trees repeatedly endure large amplitudes of motion, mostly caused by strong climatic events, yet with minor or no damage in most cases. A new damping mechanism inspired by the architecture of trees is identified here and characterized in the simplest tree-like structure, a Y-shaped branched structure. Through analytical and numerical analyses of a simple two-degree-of-freedom model, branching is shown to be the key ingredient in this protective mechanism that we call damping-by-branching. It originates in the geometrical nonlinearities so that it is specifically efficient to damp out large amplitudes of motion. A more realistic model, using flexible beam approximation, shows that the mechanism is robust. Finally, two bioinspired architectures are analyzed, showing significant levels of damping achieved via branching with typically 30% of the energy being dissipated in one oscillation. This concept of damping-by-branching is of simple practical use in the design of very slender and flexible structures subjected to extreme dynamical loadings.

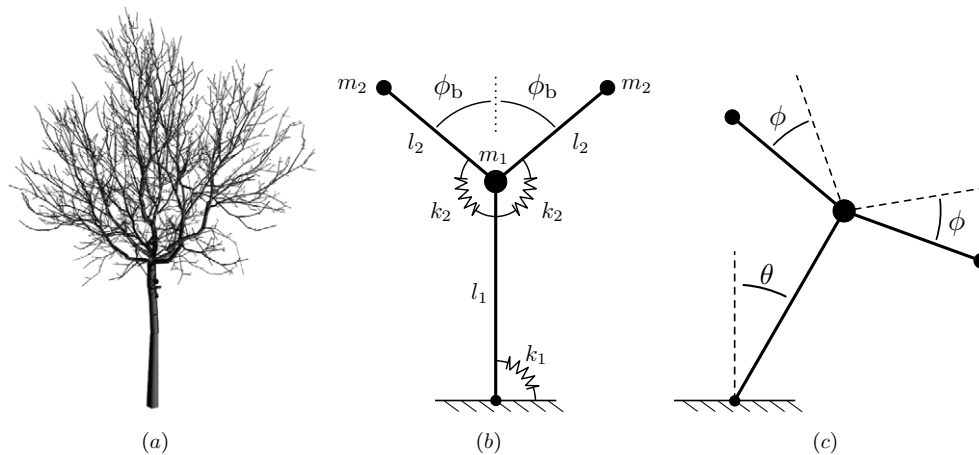
## 1. Introduction

Vibrations in man-made structures are a central problem in mechanical engineering (Den Hartog 2007). They may result from external excitations such as wind, impacts or earthquakes, or from internal excitations, such as a flow or moving parts. Their consequences are numerous in terms of functionality losses due to wear, fatigue or noise, to cite a few. We distinguish here between low and high levels of vibration. The former, where displacements are small in comparison with the characteristic size of the structure, may induce some of the long-term above-cited consequences. The latter generally cause short-term failures and irreversible damage to the structure by fracture or plastic deformation (Collins 1993). These large amplitudes of vibration may be particularly expected in slender structures, or assemblages of them, due to their high flexibility.

In the most general framework of vibration analysis, the amplitude of motion results, on one hand, from the characteristics of the loading, and on the other hand, from the characteristics of the structure in terms of inertia, stiffness and damping (Humar 2002). Damping here refers to the

capability of the structure to dissipate mechanical energy, whatever the physical mechanism involved (viscoelasticity, friction or interaction with a fluid). A high level of damping in a structure is a standard way to reduce amplitudes of motion. This is generally achieved with passive techniques, such as the classical addition of dampers (Krenk 2000), tuned mass-damper systems (Den Hartog 2007, p 119) or with active or semi-active means such as piezoelectric materials, magnetorheological fluids, shape memory alloys or even simple hydraulic actuators in feedback or feedforward systems (Preumont 2002). All these approaches have limits in terms of cost or maintenance but more particularly in terms of their range of acceptable deformations or displacements since they are not specifically designed to damp out large-amplitude vibrations. Efficient and specific damping for extreme dynamical loadings are of particular interest for slender and flexible structures such as antennas which may encounter large flow-induced amplitudes of vibration during such events (Païdoussis *et al* 2011).

Nature may give insights into highly efficient mechanical solutions in vibration problems, for instance, in shock-absorbing devices (Yoon and Park 2011). Interestingly, slender



**Figure 1.** Branched geometries. (a) The walnut tree architecture analyzed by Rodriguez *et al* (2008). (b) and (c) Our Y-shaped spring-mass model of an elementary branched tree-like structure.

structures are ubiquitous in nature, particularly in plants. Most of these plants are regularly subjected to natural flow excitations by wind or current causing vibrations (de Langre 2008). Although these vibrations contribute to some biological functions such as in seed or pollen dispersion, extreme events such as storms may cause dangerous large amplitudes of motion (Niklas 1992). Therefore, in areas where intense flows are common, plants are likely to possess efficient and specific strategies to damp out vibrations of large, potentially dangerous, amplitudes.

From a biomimetic point of view, the dynamical behavior of trees, which has been extensively studied, is certainly a possible source of inspiration. Scannell (1984) hinted that trees might possess a ‘qualitative mechanical design principle [...] beneficial to the tree’s survivability in conditions of strong atmospheric turbulence’. Niklas (1992, p 183) noted that ‘experiments indicate that branching [...] dampens natural frequencies of vibration’. At this point it is necessary to clarify what is generally agreed to cause damping in trees. Firstly, the constitutive material, wood, is known to have inherent viscoelastic behavior causing dissipation, this itself has been the source of bioinspired material (Spatz *et al* 2004). Secondly, the aeroelastic interaction with the surrounding air causes forces in the opposite direction to the local velocity in the tree, thereby causing a strongly amplitude-dependent dissipation (Blevins 1990). Finally, when considering the overall motion of the tree by bending of the trunk, another mechanism is often described as ‘structural damping’ (Brüchert *et al* 2003, Speck and Spatz 2004, James *et al* 2006, Moore and Maguire 2008). This third mechanism refers to the possible transfer of mechanical energy from the trunk to the branches, where it will be eventually dissipated by the two aforementioned aeroelastic and viscoelastic damping mechanisms (Sellier and Fourcaud 2009). But still it is not clear if this energy transfer mechanism is amplitude-dependent or not. By modeling the tree branches as coupled tuned-mass-damper systems, Spatz *et al* (2006) have shown that the frequency tuning of the branches with the trunk plays a key role in this energy transfer mechanism in trees. This model shows, by definition, a purely linear energy transfer mechanism between parts of the

whole structure so that it is not amplitude-dependent. More recently, Rodriguez *et al* (2008) analyzed the architecture of an actual walnut tree using finite element models, figure 1(a), and have shown that the modal frequencies are close and that the modal shapes are strongly localized in the architecture. The former characteristic is classically favorable to nonlinear modal energy exchanges in dynamical structures and associated with the latter would be consistent with an amplitude-dependent energy transfers from the trunk to the branches.

In order to develop strategies for bioinspired designs of slender structures including an efficient damping effect specific to large amplitudes, it is crucial to clarify the nonlinear mechanism involved in the energy transfer that many authors invoke. The aim of this paper is therefore to identify and characterize the elementary mechanism causing nonlinear modal energy transfer and damping in a branched structure specifically in the case of large-amplitude motions.

For this purpose, we first consider the simplest model of a branched dynamical system in section 2, a spring-mass model of a Y-shape. Section 3 shows, using a beam-finite-element model, that the main results of the previous section are also valid for a more realistic continuous structure of a Y-shape. Based on these results, two illustrative designs of bioinspired slender structures exhibiting efficient damping-by-branching are proposed in section 4. The generality and possible extensions of our approach are discussed in section 5.

## 2. Lumped-parameter model of a Y-shape

In order to reduce the dynamics of a branched structure to its simplest possible features, we treat the case of a spring-mass model of a Y-shape consisting of a trunk and two branches. Since we are interested in the branching effect, viscous damping is introduced in the branches only. The equations of motion are written with dimensionless variables and the dynamics is studied with an emphasis on the damping of the whole structure.

## 2.1. Model

The model consists of three massless rigid bars linked by rotational springs and supporting three masses, figure 1(b). The first bar, mimicking a trunk of length  $l_1$ , is linked to the ground by a rotational spring  $k_1$  and supports a mass  $m_1$ . The branches are two symmetrical bars of length  $l_2$ , each forming an angle  $\phi_b$  with respect to the trunk axis. Each branch is linked to the tip of the trunk by a rotational spring  $k_2$ , and supports a mass  $m_2$ . The motion of the trunk is defined by the angle  $\theta$ , and we consider only the symmetrical motion of the branches defined by the angle  $\phi$ , figure 1(c). Note that this restriction is made in order to simplify the following dynamical analysis of a two-degrees-of-freedom model. It has a small impact on the results described in this section compared to a full three-degrees-of-freedom model where each branch has an independent angle of motion. Moreover, this choice will be validated in the following sections for much more complex models which have no such restrictions. The kinetic energy is the sum of the kinetic energy of each mass:

$$T = \frac{1}{2}[(m_1 l_1^2 + 2m_2(l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos(\phi_b + \phi) + l_2^2))\dot{\theta}^2 + 2m_2 l_2^2 \dot{\phi}^2]. \quad (1)$$

The potential energy is the sum of the potential energy of each spring,

$$V = \frac{1}{2}(k_1 \theta^2 + 2k_2 \phi^2). \quad (2)$$

The equations of motion are derived using  $T$  and  $V$  in the classical framework of Lagrangian dynamics (Humar 2002). They read

$$J_\theta \ddot{\theta} + k_1 \theta = 4m_2 l_1 l_2 [\dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi_b + \phi) - \ddot{\theta} J_\phi(\phi)], \quad (3)$$

$$2m_2 l_2^2 \ddot{\phi} + 2k_2 \phi = -2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}^2 \sin(\phi_b + \phi),$$

where

$$J_\theta = m_1 l_1^2 + 2m_2(l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos \phi_b + l_2^2), \quad (4)$$

and

$$J_\phi(\phi) = \cos(\phi_b + \phi) - \cos \phi_b.$$

The left-hand side of this system of equations represents two simple linear harmonic oscillators. Denoting the generalized displacement vector  $[\theta, \phi]$ , the two corresponding normal modes of the system are directly  $[1, 0]$  and  $[0, 1]$  since there is no linear coupling between  $\theta$  and  $\phi$ . The two modal angular frequencies are respectively

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{J_\theta} \quad \text{and} \quad \omega_2^2 = \frac{2k_2}{2m_2 l_2^2}. \quad (5)$$

The first mode consists of motion involving  $\theta$  only, and the second mode involving  $\phi$  only. Therefore, in the following, they are referred to as the trunk mode and the branch mode, respectively. These two modes are coupled by the nonlinear terms of the right-hand side of (3), representing the geometric nonlinearities.

A dimensional analysis reveals the existence of four dimensionless parameters describing the dynamics of the model. We choose the dimensionless time  $\tau = \omega_1 t$ , the branching angle  $\phi_b$ , the ratio of angular frequencies  $\Omega =$

$\omega_2/\omega_1$ , and the ratio  $\Gamma$  between the inertial terms of the branch mode and the trunk mode, multiplied by the length ratio  $l_1/l_2$ :

$$\Gamma = \frac{2m_2 l_2^2}{J_\theta} \frac{l_1}{l_2} = \frac{2m_2 l_1 l_2}{J_\theta}. \quad (6)$$

The dynamics is described by the variables  $\Theta(\tau) = \theta(\tau)\sqrt{l_1/l_2}$  and  $\Phi(\tau) = \phi(\tau)$ . As mentioned earlier, we introduce energy dissipation in the form of a viscous damping rate  $\xi_b$  in the branch mode only. The dimensionless equations of motion are

$$\ddot{\Theta} + \Theta = 2\Gamma[\dot{\Theta}\dot{\Phi}\sin(\phi_b + \Phi) - \ddot{\Theta}J_\phi(\Phi)], \quad (7)$$

$$\ddot{\Phi} + 2\Omega\xi_b\dot{\Phi} + \Omega^2\Phi = -\dot{\Theta}^2\sin(\phi_b + \Phi).$$

The dimensionless total mechanical energy is

$$E(\tau) = \frac{1}{2}[(2\Gamma J_\phi(\Phi) + 1)\dot{\Theta}^2 + \Theta^2 + \Gamma(\dot{\Phi}^2 + \Omega^2\Phi^2)]. \quad (8)$$

Since the two modes are coupled by nonlinear terms, energy can be exchanged between them. In this case, the dissipation in the branch mode may damp the energy received from the trunk mode, resulting in an effective damping of the whole structure.

## 2.2. Damping criterion

In the following, we examine the free vibrations following an initial condition

$$[\Theta(0), \dot{\Theta}(0), \Phi(0), \dot{\Phi}(0)] = [\Theta_0, 0, 0, 0], \quad (9)$$

such that the energy is located in the undamped trunk mode only. This will allow us to easily demonstrate damping by nonlinear modal energy transfer, if any, since in a purely linear framework, energy would remain in the undamped trunk mode with no way of being dissipated. The amplitude of the initial condition,  $\Theta_0$ , determines the initial energy  $E(0) = E_0$ , using (8). For the sake of clarity, the energy  $E$  is normalized so that the initial energy  $E_0$  is 1 when  $\Theta_0 = \pi/2$  corresponding to a horizontal trunk initial condition. Note that ground interaction is neglected here.

During free oscillations, a part of the energy transferred from the trunk mode to the branch mode is dissipated. The total energy decay over the first period of the trunk mode is  $\Delta E = E_0 - E(2\pi)$  so that the effective damping rate of the whole structure can be defined as

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta E}{E_0}. \quad (10)$$

The effective damping rate,  $\xi_{\text{eff}}$ , is commonly related to the quality factor  $Q$  by  $Q = 1/(2\xi_{\text{eff}})$ . Note that  $\xi_{\text{eff}}$  represents the dissipation of the whole structure and not that of the trunk mode. In fact, studying exclusively the trunk mode damping is not appropriate since energy transfer can be reciprocal from the branch mode to the trunk mode as well, as will be seen in figure 3. The total energy decay  $\Delta E$  is given by the work of the damping term of the branch mode equation over one period of the trunk mode:

$$\Delta E = \frac{8}{\pi^2} \Gamma \int_0^{2\pi} 2\Omega\xi_b\dot{\Phi}^2 d\tau. \quad (11)$$

Here, the coefficient  $8/\pi^2$  comes from the normalization chosen for  $E$ . We analyze now the effect of the initial energy  $E_0$  and the design parameters  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  and  $\Gamma$  on the effective damping,  $\xi_{\text{eff}}$ .

### 2.3. Energy transfer by internal resonance

We first consider a low initial energy level so that  $\Theta_0 = \varepsilon$ , where  $\varepsilon \ll 1$  is a small parameter. The harmonic balance method (Nayfeh *et al* 1979) is used with the angles  $\Theta$  and  $\Phi$  developed as the power series of  $\varepsilon$ :

$$\Theta(\tau) = \varepsilon\Theta_1(\tau) + \varepsilon^2\Theta_2(\tau) + \dots, \quad (12)$$

$$\Phi(\tau) = \varepsilon\Phi_1(\tau) + \varepsilon^2\Phi_2(\tau) + \dots. \quad (13)$$

The initial condition (9) requires that

$$\Theta_1(0) = 1 \quad \text{and} \quad \Theta_2(0) = \Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 0. \quad (14)$$

Substituting (12) and (13) in the dynamical equations (7), and using (14), the first-order terms are

$$\Theta_1 = \cos \tau \quad \text{and} \quad \Phi_1 = 0. \quad (15)$$

The second-order terms satisfy respectively

$$\Theta_2 = 0 \quad \text{and} \quad \ddot{\Phi}_2 + 2\Omega\xi_b\dot{\Phi}_2 + \Omega^2\Phi_2 = -\dot{\Theta}_1^2 \sin \phi_b. \quad (16)$$

Therefore, for small angles, (7) reduces to

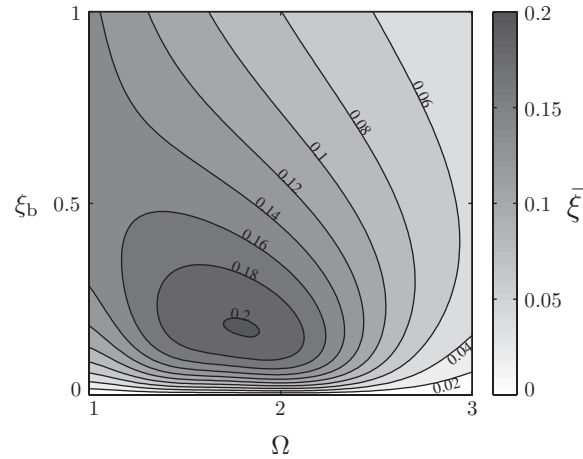
$$\ddot{\Phi} + 2\Omega\xi_b\dot{\Phi} + \Omega^2\Phi = -\Theta_0^2 \sin \phi_b \frac{(1 - \cos 2\tau)}{2}. \quad (17)$$

This is the equation of a simple harmonic damped oscillator, driven by a harmonic force, that can be analytically solved (Humar 2002). A resonance exists at  $\Omega = 2$ ; since  $\Omega$  is the frequency ratio of the two modes, this is classically referred to as a 1:2 internal resonance (Nayfeh *et al* 1979). In the following, we will discuss the influence of  $\Omega$  near this particular value. A general result for a forced damped oscillator is that the amplitude of motion is proportional to the amplitude of the driving force. As can be seen in (17), the amplitude of the driving force is proportional to  $\Theta_0^2 \sin \phi_b$ , and therefore to  $E_0 \sin \phi_b$ . The effective damping  $\xi_{\text{eff}}$ , defined by (10) and (11), can therefore be simply expressed as

$$\xi_{\text{eff}} = E_0 \Gamma \sin^2 \phi_b \bar{\xi}(\xi_b, \Omega). \quad (18)$$

Remarkably, (18) shows that  $\xi_{\text{eff}}$  increases linearly with the initial energy  $E_0$ : such a nonlinear damping proportional to the energy is typical of an oscillator following the generic equation  $\ddot{\Theta} + \kappa\dot{\Theta}^3 + \Theta = 0$  (Nayfeh *et al* 1979). Besides, (18) shows that  $\xi_{\text{eff}}$  is proportional to  $\sin^2 \phi_b$  so that the effective damping is maximal for a branching angle  $\phi_b = \pi/2$ , corresponding to a T-shaped structure. Conversely, for a non-branched structure, where  $\phi_b = 0$  or  $\pi$ , the effective damping is zero. The effective damping is also proportional to the relative modal mass ratio  $\Gamma$ . The dependence of  $\xi_{\text{eff}}$  on  $\Omega$  and  $\xi_b$  is shown in figure 2 as a contour map of the normalized effective damping  $\bar{\xi}$ , computed using mathematical symbolic software to solve (17) for  $\Phi$ , and then using successively (11), (10) and (18) for  $\bar{\xi}$ .

As expected, we observe in figure 2 that there is no effective damping for  $\xi_b = 0$  since mechanical energy cannot be dissipated in the structure. Interestingly, for any arbitrary small value of  $\xi_b$ , the effective damping is finite. In a purely linear framework, the effective damping would be zero for



**Figure 2.** Normalized effective damping  $\bar{\xi}$ , (18), brought about by branching, as a function of the branch mode damping  $\xi_b$ , and the branch/trunk modal frequency ratio  $\Omega$ . High damping is found near the 1:2 internal resonance, i.e. at  $\Omega = 2$ .

any value of  $\xi_b$ , since the total energy would be confined to the trunk mode, without any possible transfer to the branch mode where dissipation occurs. In other words, the effective damping is due to the geometric nonlinearities.

We observe that a significant level of damping is present over a wide range of parameter values. The effective damping shows a maximum for branch damping near 0.2 and frequency ratio near 2. Accordingly, the values  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$  will be used as a reference in the remainder of this paper.

### 2.4. Effects of the design parameters

In order to obtain the full dynamics and the corresponding effective damping at any energy level with an emphasis on the effects of the design parameters  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  and  $\Gamma$ , the dynamical system (7) is now solved numerically by means of a fourth-order explicit Runge–Kutta temporal scheme.

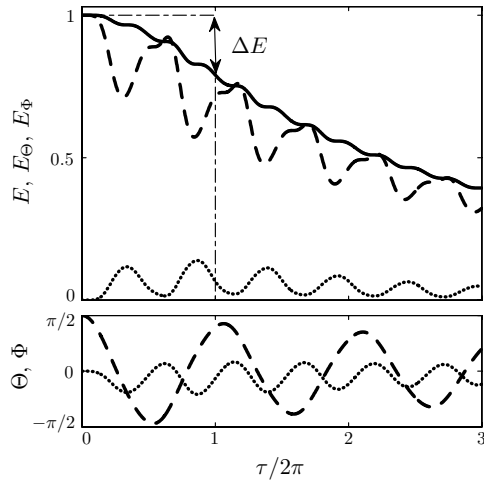
As a typical example, figure 3 shows, for an initial energy level  $E_0 = 1$ , the evolution of the total energy  $E$  and of the modal energies

$$E_\Theta = \frac{4}{\pi^2}(\dot{\Theta}^2 + \Theta^2) \quad \text{and} \quad E_\Phi = \frac{4}{\pi^2}\Gamma(\dot{\Phi}^2 + \Omega^2\Phi^2). \quad (19)$$

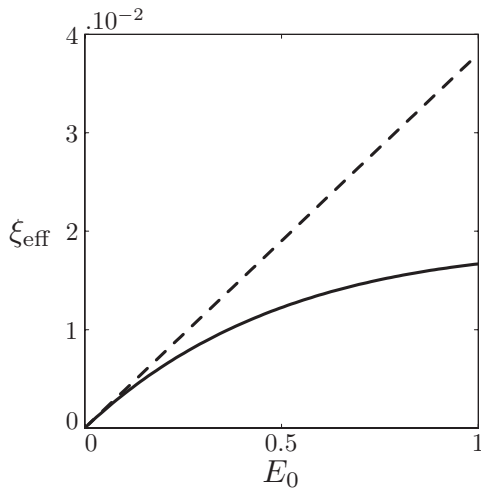
Note that the total energy  $E$ , (8), is the sum of  $E_\Theta$ ,  $E_\Phi$  and a nonlinear energy term. The energy exchange between the two modes is clearly shown. Since energy is dissipated in the branch mode, the total energy decays at an effective damping rate  $\xi_{\text{eff}}$ . Figure 4 shows the  $E_0$ -dependence of this effective damping  $\xi_{\text{eff}}$ , in comparison with the analytical prediction of the previous section. As expected, the analytical approach corresponds to the limit of the numerical solution as  $E_0$  tends to zero. As  $E_0$  increases, the analytical approach increasingly overestimates the numerical effective damping. However, the ratio  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ —constant in the analytical approach—remains finite: this constitutes the essential effect of branching on damping.

The influences of the design parameters  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  and  $\Gamma$  on the effective damping, scaled by the initial energy,





**Figure 3.** Typical evolution of the total energy,  $E$  (—), and modal energies,  $E_\Theta$  (---) and  $E_\Phi$  (.....), with the respective evolution of the trunk angle,  $\Theta$  (---), and branch angle,  $\Phi$  (.....), of the spring-mass model of a Y-shape, as a function of time over three periods of the trunk mode. The initial energy is  $E_0 = 1$ , i.e.  $\Theta_0 = \pi/2$ , in the trunk mode only. The total energy decreases as a consequence of the energy nonlinearly transferred to the damped branch mode. The design parameters are set to  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ .



**Figure 4.** Effect of the initial energy level,  $E_0$ , on the effective damping,  $\xi_{\text{eff}}$ , of the spring-mass model of a Y-shape: (---) analytical effective damping from the low energy approximation, (18); (—) numerical effective damping from the full dynamics integration of (7). The design parameters are set to the same values as in figure 3.

$\xi_{\text{eff}}/E_0$ , are represented in figures 5(a)–(d) for three initial energy levels. As expected, the analytical and numerical approaches yield identical results for low energy levels and therefore are represented by the same curve for  $E_0 = 0.01$ . Consistently with figure 4, we observe that the analytical approach overestimates the numerical effective damping as  $E_0$  increases. In figure 5(a), at low energy levels, the effective damping is proportional to  $\sin^2 \phi_b$  as predicted by the analytical approach (18). The optimal branching angle  $\phi_b$  shifts from  $\pi/2$  to slightly higher values when the initial energy level increases. Therefore, in order to obtain an

optimum effective damping at any energy, a good compromise would be to set the branching angle  $\phi_b$  between  $\pi/2$  and  $2\pi/3$ .

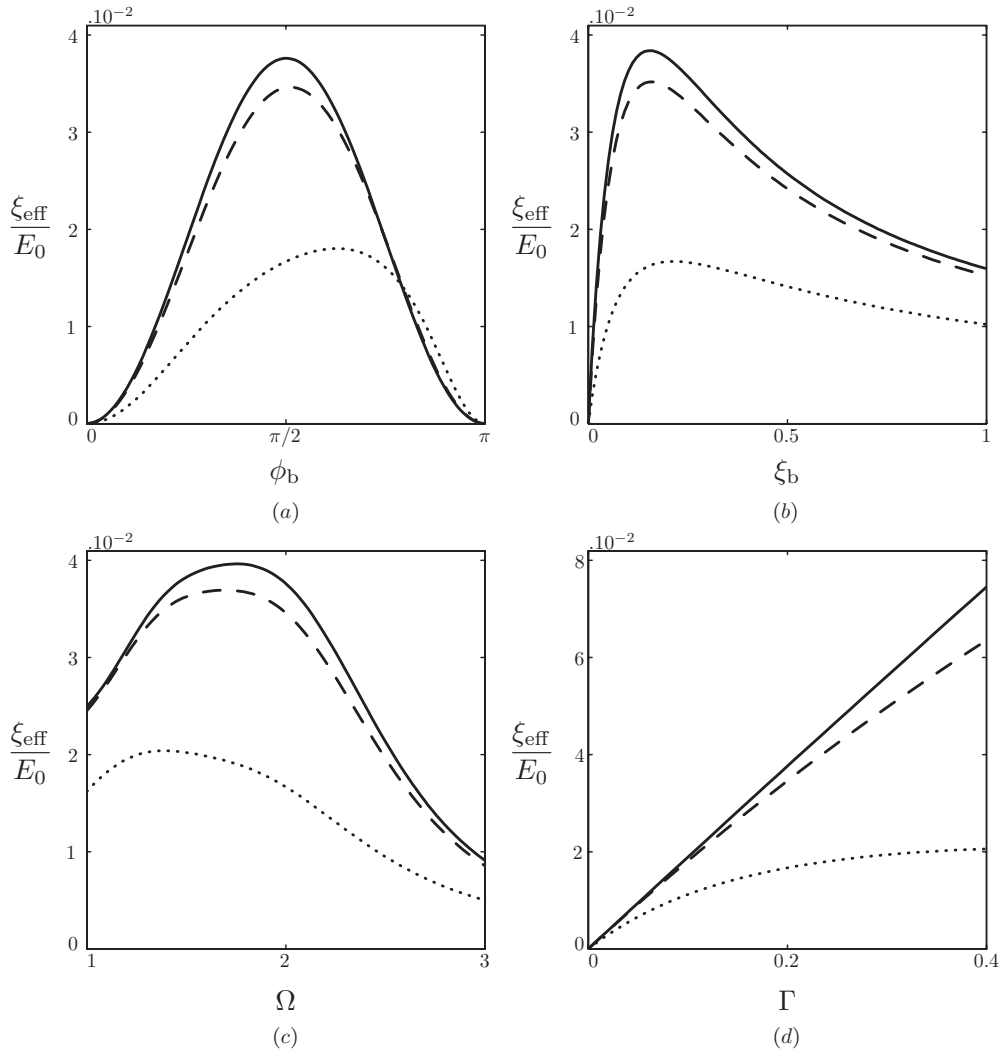
Not surprisingly, figure 5(b) shows an optimal branch mode damping ratio value at about 0.2. In fact,  $\xi_b = 0$  obviously results in no effective damping since the energy cannot be dissipated anywhere in the undamped structure. In the other limit of high branch damping, the branch mode is critically damped so that the branches are locked with the trunk, resulting in a low nonlinear energy transfer and consequently a low effective damping mechanism. This classical behavior can be seen for other types of structure such as for taut cables (Krenk 2000). Figure 5(b) shows that significant effective damping is created by a large range of branch mode damping,  $\xi_b$ , as was also found in the low-energy analytical approach. Analogously, the typical shape of the  $\Omega$ -dependence at low energy is also conserved when the energy increases, figure 5(c), with an optimal value of  $\Omega \approx 1.8$  and a large range of frequency ratio leading to a significant effective damping  $\xi_{\text{eff}} > 3\%$ . Finally, the simple  $\Gamma$ -dependence on the effective damping is shown in figure 5(d). The modal mass ratio  $\Gamma$  has to be maximal in order to get the highest possible effective damping. For a high energy level, we observe that the effective damping  $\xi_{\text{eff}}$  is almost constant for  $\Gamma$  between 0.2 and 0.4.

### 3. Finite-element model of a Y-shape

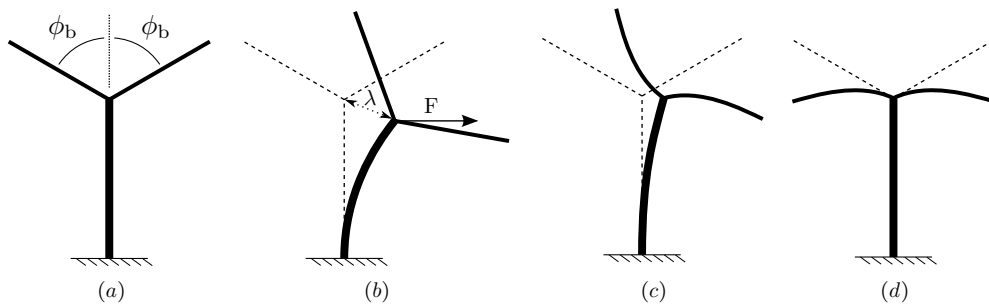
The damping-by-branching mechanism described in the preceding section is now analyzed in the case of a more realistic continuous beam structure of a Y-shape. The same approach is used to demonstrate the effective damping: initial energy in the trunk, dissipation in the branches and effective damping evaluated by the total energy loss over one period of the trunk mode. Note that this model incorporates several differences from the previous one: a very large number of modes, symmetric and non-symmetric modes, non-localized mass and stiffness.

#### 3.1. Model

The model consists of three assembled beams, figure 6(a). Each beam has a uniform circular cross-section and is made of a linearly elastic, isotropic and homogeneous material. The trunk, of length  $l_1$  and diameter  $d_1$ , is clamped at the base. Two symmetrical branches, each of length  $l_2$  and diameter  $d_2$ , are clamped at the tip of the trunk so that they each form an angle  $\phi_b$  with the trunk direction. As in section 2, we analyze the free vibrations of the structure. To solve the equations of motion, numerical finite-element computations are performed using the CASTEM v.3M software (Verpeaux *et al* 1988). The finite-element model consists of Euler-Bernoulli beam elements, the trunk and each branch being described by ten mesh-elements. This refinement was found sufficient to describe the full dynamics of the system according to a convergence test. In order to take into account large amplitudes of motion, since we are interested in geometric nonlinearities, an incremental step-by-step procedure is used in



**Figure 5.** Effects of the design parameters on the effective damping scaled by the initial energy,  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ , of the spring–mass model of a Y-shape:  $E_0 = 0.01$  (—);  $E_0 = 0.1$  (---); and  $E_0 = 1$  (·····). Unless varied, the design parameter values are  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ . (a) Effect of the branching angle  $\phi_b$ . (b) Effect of the branch mode damping  $\xi_b$ . (c) Effect of the branch/trunk modal frequency ratio  $\Omega$ . (d) Effect of the branch/trunk modal mass ratio  $\Gamma$ .



**Figure 6.** The continuous model of a Y-shape. (a) Geometry. (b) Static initial condition. (c) Trunk mode. (d) Damped branch mode.

the CASTEM v.3M software. This procedure uses an implicit Newmark scheme. All stiffnesses are updated at each step, including the elastic stiffness and the geometrical stiffness related to internal stress.

The first two modal shapes are given by modal analysis and are shown in figures 6(c) and (d). The branch mode,

figure 6(d), involves only bending of the branches as for the lumped parameter model of section 2, but the trunk mode, figure 6(c), involves mainly trunk bending, with a small amount of bending of the branches. Still, we will refer to this mode as the trunk mode for the sake of clarity and for comparison with the model of the previous section.



By analogy with (9), the initial condition is an initial deformation resulting from a horizontal static pull on the tip of the trunk, figure 6(b). The resulting initial energy  $E_0$  is normalized so that it is equal to 1 when the deflection of the trunk is equal to its length such that  $\lambda = l_1$ . This initial condition corresponds to a distribution of the total deformation energy as follows: 94.3% in the trunk mode, 0% in the branch mode and 5.7% in all other modes. By analogy with section 2, two dimensionless parameters are chosen: the frequency ratio  $\Omega = \omega_2/\omega_1$  and a mass ratio  $\Gamma = (l_1 m_2)/(l_2 m_1)$ , where  $\omega_1, \omega_2$ , and  $m_1, m_2$  are the modal angular frequencies and the modal masses of the trunk mode and branch mode, respectively. Energy dissipation is introduced artificially on the branch mode only. To do so, a damping matrix  $[C]$  is derived from the mass matrix  $[M]$  of the finite-element model, from the branch mode modal shape vector denoted  $\underline{\psi}_b$  and with the aimed branch mode damping ratio denoted  $\xi_b$  as follows:

$$[C] = \frac{2\xi_b\omega_2}{m_2}([M]\underline{\psi}_b) \otimes ([M]\underline{\psi}_b), \quad (20)$$

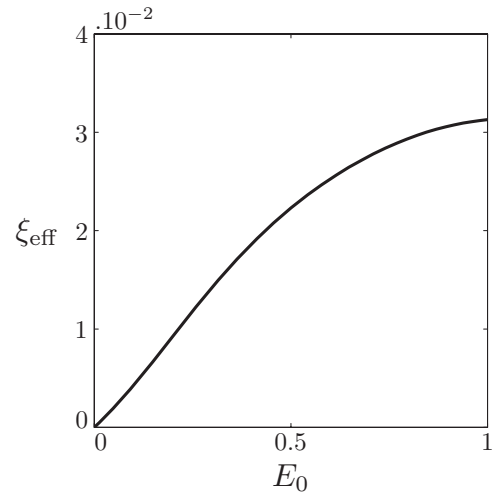
where  $\otimes$  denotes the tensor product. Note that this form of the damping matrix is not related to a particular physical choice of Rayleigh damping but is built *ad hoc* to evidence the specific role of branch mode damping in the model energy transfer.

The resulting effective damping mechanism is studied with the same definition of the effective damping rate,  $\xi_{\text{eff}}$ , as in section 2.2, and for the same reference values of the design parameters  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ .

### 3.2. Results

The simulated dynamics of the continuous Y-shape yields a similar time evolution of the total energy to that of the lumped parameter model, figure 3. The corresponding effective damping rate is plotted in figure 7 as a function of the normalized initial energy  $E_0$ . As in figure 4, the effective damping rate increases with the initial energy level, quasi-linearly at first, reaching several percent for high levels of initial energy. This is a first indication of the robustness of the effect of branching on damping in a more realistic structure.

As in section 2, the effects of the design parameters  $\phi_b$ ,  $\xi_b$ ,  $\Omega$  and  $\Gamma$  on the effective damping scaled by the initial energy,  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ , are represented in figures 8(a)–(d) for three initial energy levels. Some differences appear for the continuous model as expected. First, the branching effect on the effective damping is clearly maximal for larger branching angles,  $\phi_b \approx 2\pi/3$ , rather than  $\pi/2$ , figure 8(a). Second, the effective damping stabilizes or even slightly increases with the branch mode damping  $\xi_b$ , figure 8(b), instead of decreasing after  $\xi_b \approx 0.2$ . Third, the effective damping is higher at a modal frequency ratio  $\Omega = 3$  than  $\Omega = 2$ , figure 8(c), suggesting a richer pattern of internal resonances. Singularly, we observe that the effective damping vanishes here for  $\Omega = 1$ . This is explained by the fact that, as  $\Gamma$  is kept constant,  $\Omega = 1$  represents a physical limit where the length of the branches compared to the trunk tends toward 0. Finally, the effective



**Figure 7.** Effect of the initial energy level,  $E_0$ , on the effective damping,  $\xi_{\text{eff}}$ , of the continuous model of a Y-shape. The design parameters are set to  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ .

damping increases with the modal mass ratio  $\Gamma$  but in a more complex way, figure 8(d).

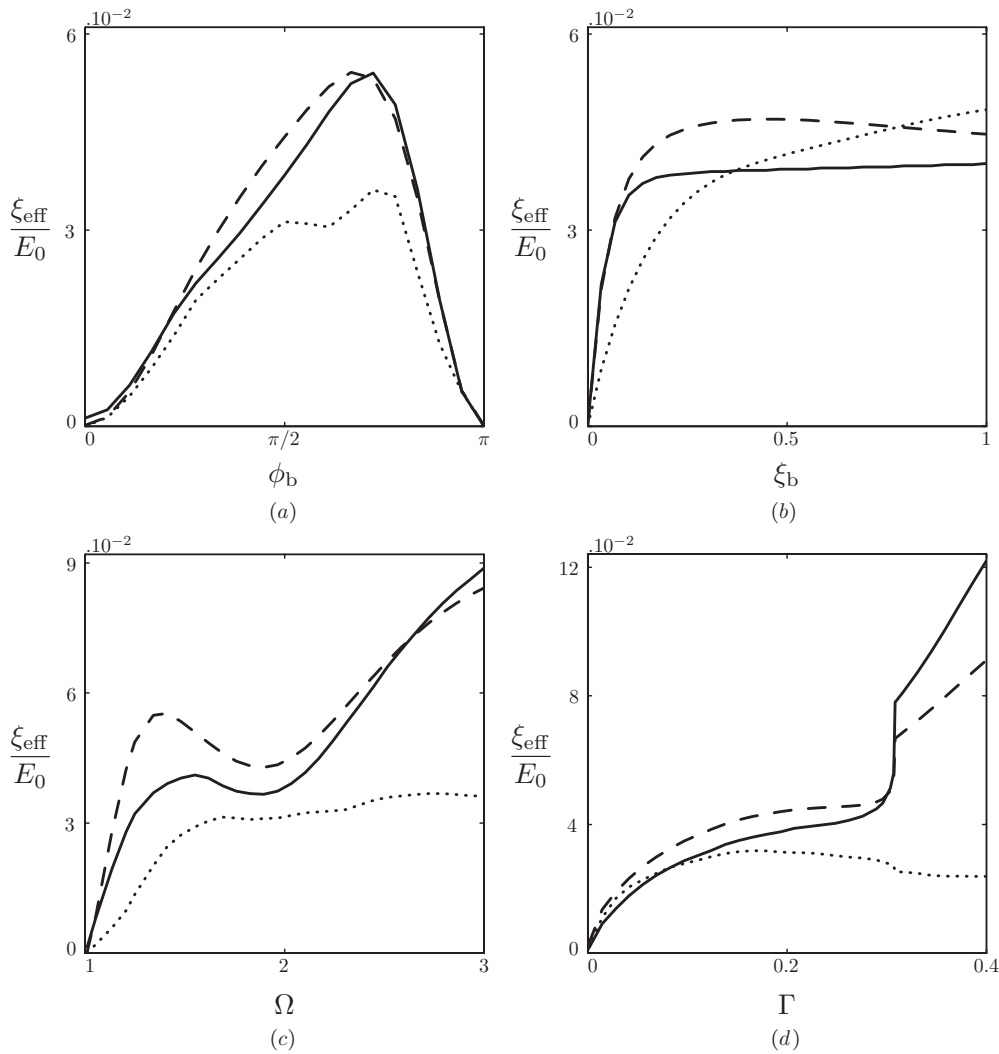
To further characterize the dynamics of the system, we consider now its response to a harmonic loading. From the rest position, the structure is forced with an oscillating torque of frequency  $\Omega_f$  and amplitude  $M_0$  near the base of the trunk at one-tenth of the height of the trunk. The steady state oscillation amplitude,  $\lambda$ , is shown in figure 9, relative to the static response  $\lambda_{\text{static}}$ . Because of the damping-by-branching nonlinear mechanism, the resonance peaks at  $\Omega_f = 1$  and  $\Omega_f = 2$  are damped though there is no damping in the trunk mode. One can also estimate an effective damping ratio  $\xi_{\text{eff}}$ , considering that the amplitude at the resonance peak divided by the static response is proportional to  $1/(2\xi_{\text{eff}})$ . One obtains  $\xi_{\text{eff}} \approx 5\%$  for the first peak resonance, where the level of energy  $E$  associated with the amplitude  $\lambda$  is about 0.9. This value of effective damping is consistent with the case of the previous pull-and-release loading in this range of energy, see figure 7.

In conclusion, it appears that the main features of the damping-by-branching mechanism are still present in this more realistic Y-shaped structure.

## 4. Two bioinspired branched structures

Based on the results of sections 2 and 3, two bioinspired branched structures are considered, figure 10. These two bioinspired structures have the same trunk of length  $l_1$  and diameter  $d_1$  as the model of section 3, so that the initial condition is the same, with an initial bending energy in the trunk only, as in figure 6(b), and with the same definition of the initial energy  $E_0$ .

The first bioinspired structure, shown in figure 10(a), is a two-generation T-shaped structure designed so that  $\phi_b = \pi/2$  at each branching. The ratios of branch length and diameter are respectively the same between orders of branching, i.e.  $l_2/l_1 = l_3/l_2$  and  $d_2/d_1 = d_3/d_2$ . They are chosen so that the



**Figure 8.** Effects of the design parameters on the effective damping scaled by the initial energy,  $\xi_{\text{eff}}/E_0$ , of the continuous model of a Y-shape:  $E_0 = 0.01$  (—);  $E_0 = 0.1$  (---); and  $E_0 = 1$  (·····). Unless varied, the design parameter values are  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ . (a) Effect of the branching angle  $\phi_b$ . (b) Effect of the branch mode damping  $\xi_b$ . (c) Effect of the branch/trunk modal frequencies ratio  $\Omega$ . (d) Effect of the branch/trunk modal mass ratio  $\Gamma$ .

modal frequency ratio between the trunk mode, figure 10(b), and the last-order branch mode, figure 10(c), is 1:2 and so that the modal mass ratio is 0.2. With the same procedure as in the previous section, (20), a damping rate of 0.2 is introduced in this last-order branch mode only.

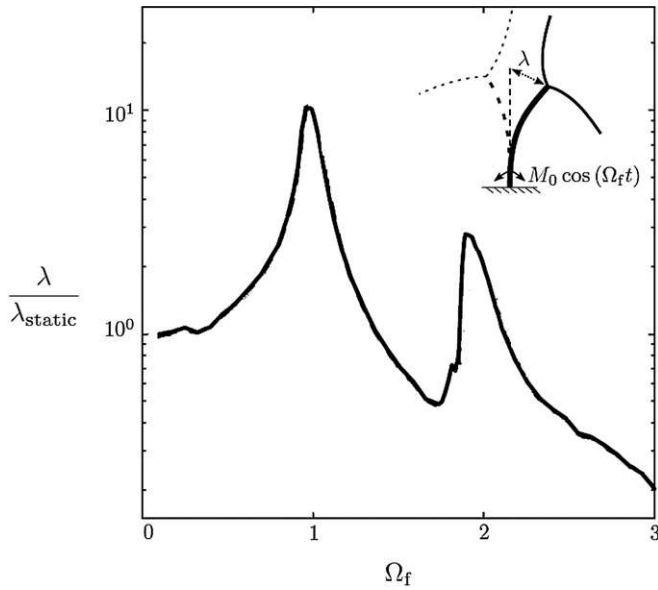
The second bioinspired structure, shown in figure 10(d), consists of a double Y-shaped pattern with an added level of branching at 3/4 of the height of the trunk. Both levels of branching have a branching angle  $\phi_b = 2\pi/3$  and are designed so that the modal frequency ratio between the trunk mode, figure 10(e), and the large branch mode, figure 10(f), is 2, and the modal frequency ratio between the trunk mode and the small branch mode, figure 10(g), is 3. A damping of 0.2 is introduced in the two branch modes only. The resulting effective damping is studied with the same damping criterion as in section 2.2 and is plotted in figure 11 as a function of the normalized initial energy. In both structures, the effective damping reaches several per cent ( $\approx 3\%$ ) for high levels of initial energy, roughly corresponding to a third of the initial energy being dissipated after one period of the first mode.

These results on two different bioinspired branched structures show that the damping-by-branching mechanism seems to be robust regarding the branching scheme.

## 5. Discussion and conclusion

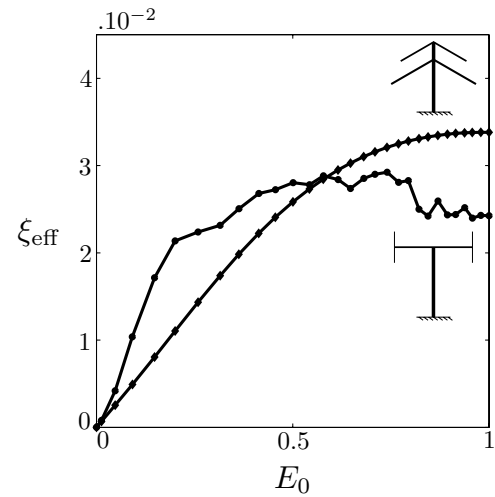
At this stage, one may consider the results of the preceding sections in relation to the proposed aim of the paper: to identify and characterize the elementary mechanism that causes nonlinear modal energy transfer and amplitude-dependent damping in branched structures. In section 2, we have shown that branching is the key ingredient needed to obtain the modal energy transfer and the resulting effective damping that several authors had suspected. Sections 3 and 4 confirm that the essential features of this damping-by-branching are present even in more complicated branched models.

Clearly, the mechanism found here is complementary to the tuned-mass damper mechanism described by Spatz *et al* (2007) in trees. The present damping-by-branching



**Figure 9.** Scaled steady-state displacement of the continuous model of a Y-shape in response to an oscillating torque of frequency  $\Omega_f$  near the base of the trunk. Reference values of the design parameters are used,  $\phi_b = \pi/2$ ,  $\xi_b = 0.2$ ,  $\Omega = 2$  and  $\Gamma = 0.2$ .

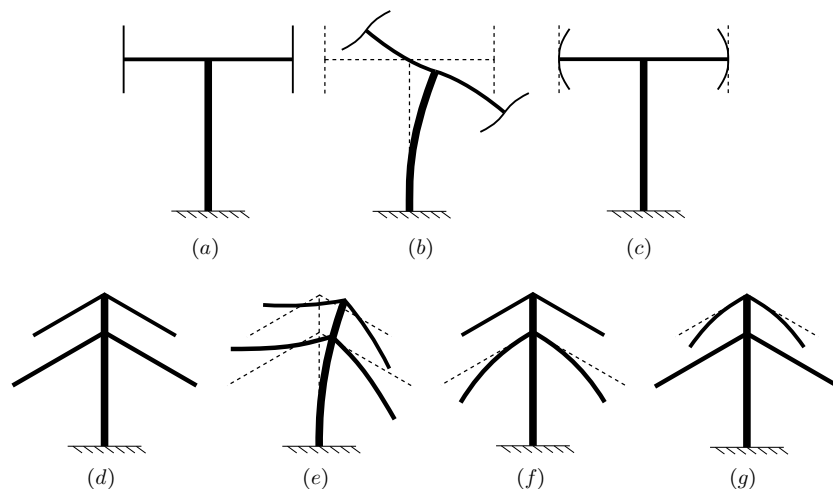
mechanism consists of two essential characteristics: (i) it is not associated with the condition of identical modal frequencies of the trunk mode and of the branch mode; (ii) since it originates in geometrical effects, the larger the amplitude of motion, the higher the effective damping. As this mechanism is specific to damp out large-amplitude motions, it can be useful only in very slender and flexible structures where the limit elastic stress is reached only during extreme dynamical events. In this type of structure, we have shown that this damping-by-branching can be achieved with some requirements on the design parameters: a modal frequency ratio between the trunk



**Figure 11.** Effect of the initial energy level,  $E_0$ , on the effective damping,  $\xi_{\text{eff}}$ , of the two bioinspired structures. (●) Ramified T-shaped structure; (◆) double-branched Y-shaped structure.

mode and the branch mode near 1:2, a branch damping ratio about 0.2, and the highest possible modal mass ratio. All these results suggest that modal energy transfer and the resulting damping-by-branching are robust effects at large amplitudes of motion.

Before generalizing our results, discussion is needed of some of the assumptions made to derive them. Firstly, the analyses pertaining to the effective damping have been made on the dynamical responses to pull-and-release initial loading or to a harmonic excitation of the trunk. This choice was made so that only the nonlinear geometrical effects could cause the effective damping of the structure. If other classical types of loading were considered such as an initial impulse, or a random forcing (Humar 2002), energy would have been given to all the modes of the branched structure. Although this would make the global energy balance more complex to analyze, the



**Figure 10.** Two bioinspired branched structures. (a) A two-order ramified T-shaped structure, and its modes of interest: (b) trunk mode, (c) damped branch mode. (d) A double-branched Y-shaped structure, and its modes of interest: (e) trunk mode, (f) damped large branch mode, (g) damped small branch mode.

nonlinear geometric terms responsible for the modal energy transfer (7) would still be present but the resulting effective damping would not be simply quantified. Secondly, we have always considered perfectly symmetric and plane structures. If asymmetry between the branches is introduced in the model of section 2, a linear coupling is introduced between the trunk and branch angles of motion so that the energy balance analysis becomes more complex. By some aspects, such a change is expected to bring similar effects as when introducing higher modes, as was done in sections 3 and 4: the mechanism is qualitatively the same. Similarly, if three-dimensional effects are introduced, such as torsion or multiple 3D branching as in real trees, a much larger number of degrees of freedom is needed in order to describe the dynamics of the structure. However, the results of sections 3 and 4 show that complicating the modal content of the model does not impact the existence of the modal transfer mechanism and the resulting effective damping. Moreover, Rodriguez *et al* (2008) showed that there exist no significant differences between the dynamics of an actual tree architecture and that of an idealized one.

Finally, an important requirement of this damping-by-branching mechanism is the damping of the branch mode. We have shown that the optimal damping ratio for this mode is approximately  $\xi_b = 20\%$ . Under this condition, for a general structure of mass  $m$ , stiffness  $k$ , the physical damping denoted  $c$  scales as  $\xi_b \sqrt{mk}$ . In other words, such a damping ratio cannot be expected for heavy structures. However, for light structures, physical phenomena such as drag-induced damping for a slender structure vibrating in a cross flow often reach this order of magnitude for the damping ratio, see Blevins (1990). More generally, the question of how branched systems move in a fluid environment is important in practice. In fact, our analysis on damping originated in the dynamics of trees under wind-loading (Spatz *et al* 2007). In the interaction between a branched structure and flow, several distinct effects may be expected (Blevins 1990, Paidoussis *et al* 2011). Firstly, even in the absence of flow, just the presence of a fluid around the structure causes damping. This damping is present in all modes, is amplitude-dependent, and introduces nonlinear coupling between modes. Flow-induced damping may also appear in addition. These effects may be gathered under the generic term of aeroelastic or hydroelastic damping. Secondly, added mass and added stiffness effects appear and may alter the essential dynamical characteristics of the branched structure, such as frequencies and modal shapes. These effects are more pronounced in water. Finally, flow may cause a large variety of loadings through mechanisms such as turbulence excitation or wake interactions. From this list, it appears that all the key parameters involved in the mechanism of damping-by-branching are affected by a fluid environment: modal damping, frequencies, modal shapes and external excitations. In our models, only artificial loadings and modal damping have been investigated so that a systematic analysis of these effects is clearly needed on the basis of the simple framework presented in this paper.

In the design of a slender, flexible and light structure that may encounter extreme dynamical loadings, a simple rule to follow is to introduce branching and a significant damping

ratio between branches. Secondary rules, aiming at optimizing the efficiency of this damping mechanism, are to set the ratio between the modal frequency of the branch mode and the trunk mode near 1:2 and the modal mass ratio as high as possible. Although a design rule based on the ratio of modal frequencies and masses is not common, it should be noted that the requirements are not strict, as we have shown in sections 2 and 3 that damping-by-branching is robust and is significant for a wide range of modal frequency and mass ratios. The 1:2 rule is only indicative, as it is related to the original internal resonance condition between the branch and trunk modes. At this point, the concept of damping-by-branching has only been demonstrated to exist theoretically and numerically. Although it has been inspired by the observation of natural systems, it evidently needs to be explored experimentally on man-made structures.

## Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the help of Chris Bertram, from the University of Sydney, Cyril Touzé, from ENSTA-UME, and Alain Millard from CEA-Saclay for stimulating discussions and useful corrections on the manuscript. This research was funded by the French Ministry of Defence—DGA (Délégation Générale pour l'Armement)—through the PhD scholarship program and the contract 2009.60.034.00.470.75.11.

## References

- Blevins R 1990 *Flow Induced Vibration* (New York: Van Nostrand-Reinhold)
- Brüchert F, Speck O and Spatz H 2003 Oscillations of plants' stems and their damping: theory and experimentation *Phil. Trans. R. Soc. B* **358** 1487
- Collins J 1993 *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention* (New York: Wiley Interscience)
- de Langre E 2008 Effects of wind on plants *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40** 141–68
- Den Hartog J 2007 *Mechanical Vibrations* (New York: Dover)
- Humar J 2002 *Dynamics of Structures* (London: Taylor and Francis)
- James K, Haritos N and Ades P 2006 Mechanical stability of trees under dynamic loads *Am. J. Bot.* **93** 1522
- Krenk S 2000 Vibrations of a taut cable with an external damper *J. Appl. Mech.* **67** 772
- Moore J and Maguire D 2008 Simulating the dynamic behavior of Douglas-fir trees under applied loads by the finite element method *Tree Physiol.* **28** 75
- Nayfeh A, Mook D and Corporation E 1979 *Nonlinear Oscillations* vol 31 (New York: Wiley)
- Niklas K 1992 *Plant Biomechanics: An Engineering Approach to Plant Form and Function* (Chicago, IL: University of Chicago Press)
- Paidoussis M, Price S and de Langre E 2011 *Fluid–Structure Interactions: Cross-Flow Induced Instabilities* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Preumont A 2002 *Vibration Control of Active Structures: An Introduction* (Berlin: Springer)
- Rodriguez M, de Langre E and Moullia B 2008 A scaling law for the effects of architecture and allometry on tree vibration modes suggests a biological tuning to modal compartmentalization *Am. J. Bot.* **95** 1523

- Scannell B 1984 Quantification of the interactive motions of the atmospheric surface layer and a conifer canopy *PhD Thesis* Cranfield Institute of Technology, Bedford, UK
- Sellier D and Fourcaud T 2009 Crown structure and wood properties: influence on tree sway and response to high winds *Am. J. Bot.* **96** 885
- Spatz H, Bruchert F and Pfisterer J 2006 How do trees escape dangerously large oscillations? *5th Plant Biomechanics Conf. (Stockholm, Sweden)* ed L Salmen pp 275–80
- Spatz H, Bruchert F and Pfisterer J 2007 Multiple resonance damping or how do trees escape dangerously large oscillations? *Am. J. Bot.* **94** 1603
- Spatz H, Emanns A and Speck O 2004 The structural basis of oscillation damping in plant stems—biomechanics and biomimetics *J. Bionics Eng.* **1** 149–58
- Speck O and Spatz H 2004 Damped oscillations of the giant reed *Arundo donax* (Poaceae) *Am. J. Bot.* **91** 789
- Verpeaux P, Charras T and Millard A 1988 CASTEM 2000: une approche moderne du calcul des structures *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle* ed J M Fouet *et al* (Paris: Pluralis) pp 261–71
- Yoon S and Park S 2011 A mechanical analysis of woodpecker drumming and its application to shock-absorbing systems *Bioinsp. Biomim.* **6** 016003